فصل اول

آشنائی با سیستمهای کنترل

تعاریف اولیه سیستمهای کنترل خطی:

۱. **سیستم** (*System*) : مجموعه ای از اجزا هستند که با هم کار میکنند تا یک هدف خاص را دنبال کنند.

۲. **فرایند** (*process*) : بخش خاصی از یک سیستم است که میخواهیم آن را تحت اختیار خود قرار دهیم.

۳. **ورودی** (*Input*) : سیگنال یا فرمانی است که برای هدایت پروسه به آن اعمال می شود (یک سیستم می تواند یک یا چند ورودی داشته باشد). به ورودی مقدار مطلوب نیز گفته می شود.

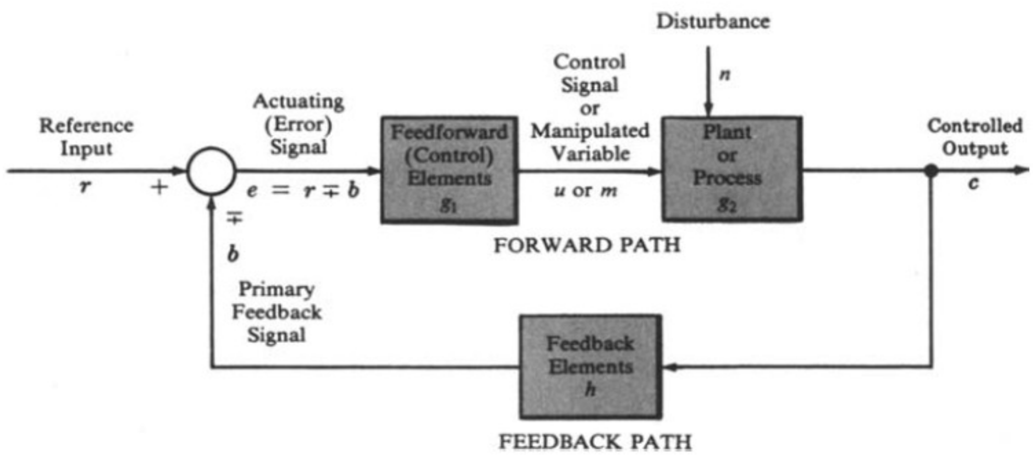
۴. **خروجی** (*Output*): رفتاری از یک سیستم است که مورد توجه ماست و می خواهیم آن را در اختیار خود قرار دهیم (یک سیستم می تواند یک یا چند خروجی داشته باشد). به سیستمی که یک ورودی و یک خروجی دارد *SISO* و به سیستمی که چند ورودی یا خروجی داشته باشد *MIMO* گفته می شود.

۵. **اغتشاش** (*Noise*) : عاملی است که بر خروجی پروسه تأثیر نا مطلوب می گذارد.

۶. **فید بک** (*Feed Back*) : اندازه گیری خروجی و مقایسه آن با ورودی و تولید یک سیگنال خطا را فید بک می گوییم.

۷. **کنترل** (*Control*) : بدین معنی است که بتوانیم بکمک تجهیزاتی که در اختیار داریم خروجی پروسه را به گونه ای در اختیار بگیریم تا متناسب با ورودی تغییر کند و عامل اغتشاش روی آن اثر کمی بگذارد.

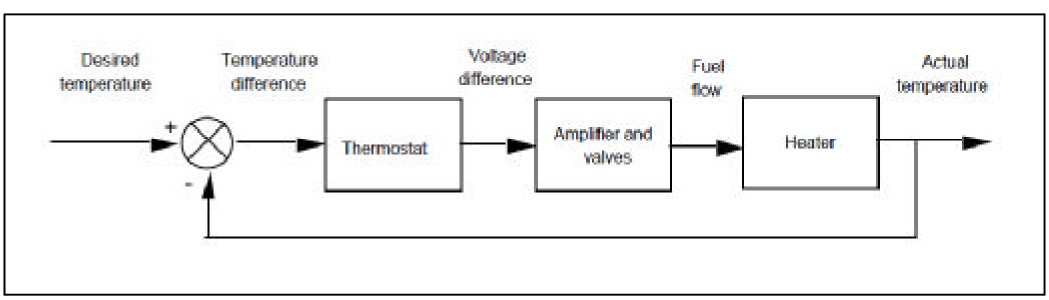
در شکل زیر می توان اجزاء یک سیستم کنترلی را مشاهده کرد:



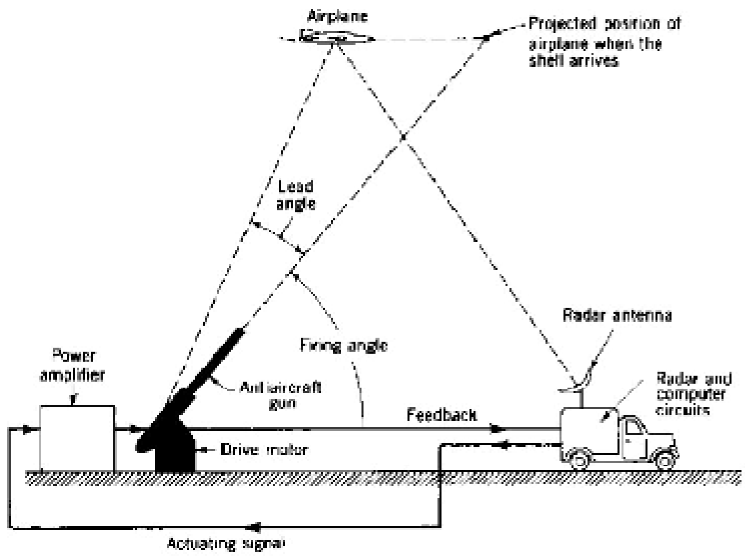
انواع سیستمهای کنترل:

کنترل فرایند : سیستمهایی که در آن ورودی دارای تغییرات نسبتا کند و در یک محدوده مشخص هستند و عامل اغتشاش تأثیر زیادی بر پروسه دارد سیستمهای کنترل فرایند نامیده میشوند. (مانند: پروسه کنترل دما، کنترل رطوبت، کنترل نور و ...)

شکل زیر بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل دما را نمایش می دهد.

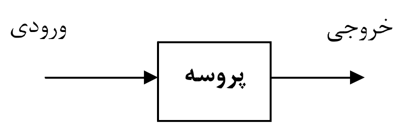


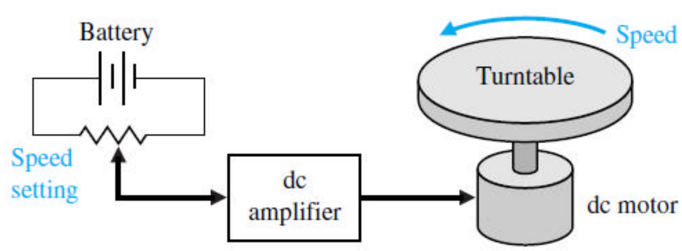
سرو مکانیزم : سیستمهایی هستند که در آنها خروجی مورد نظر، سرعت یا موقعیت یا گشتاور است در این گونه سیستمها تغییرات ورودی خیلی سریع و دامنه نا مشخصی دارد.



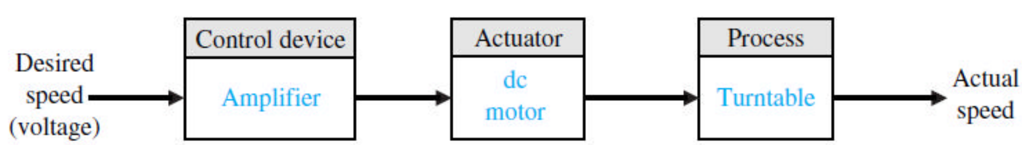
انواع سیستمهای کنترل از نظر استراتژی کنترل:

سیستمهای کنترل حلقه باز :



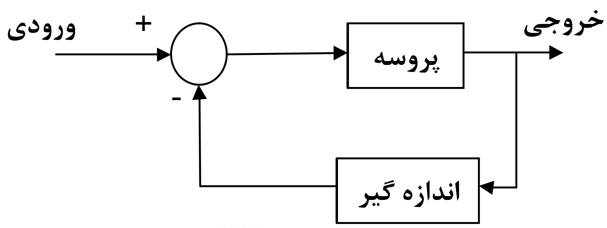


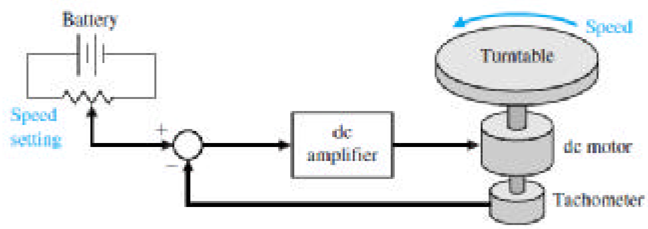
سیستم کنترل حلقه باز برای کنترل سرعت یک موتور *dc* به همراه بلوک دیاگرام آن

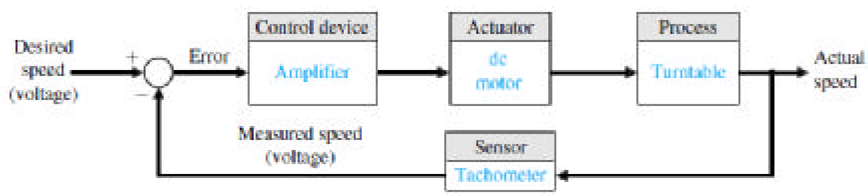


در سیستمهای کنترل حلقه باز هیچ فیدبکی از خروجی به ورودی داده نمیشود.

سیستمهای کنترل حلقه بسته :







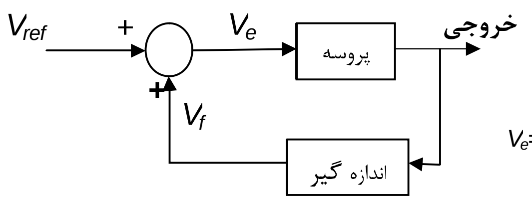
در شکل فوق سیستم کنترل سرعت موتور dc دیده می شود که برای تثبیت سرعت موتور در حالت بارداری و بی باری از از تاکومتر برای اندازه گیری سرعت و فیدبک آن به ورودی استفاده شده است.

تفاوت اصلی بین یک سیستم حلقه باز و بسته در وجود یا عدم وجود فیدبک است. در سیستم حلقه باز خروجی پروسه می تواند اندازه گیری شود ولی نتیجه کار با مقدار مطلوب مقایسه نمی شود تا رفتار سیستم اصلاح شود ولی در سیستم حلقه بسته این نظارت و کنترل دائماً در حال انجام است.

انواع فید بک :

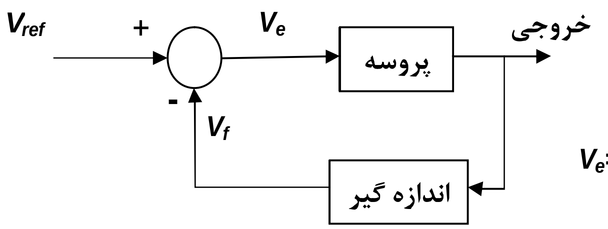
در سیستمهای حلقه بسته فیدبک می تواند بصورت مثبت یا منفی باشد و در سیستمهای کنترل فیدبک مثبت باعث ناپایداری و انهدام سیستمها می شود بنابراین همواره از فیدبک منفی استفاده می شود.

فیدبک مثبت :



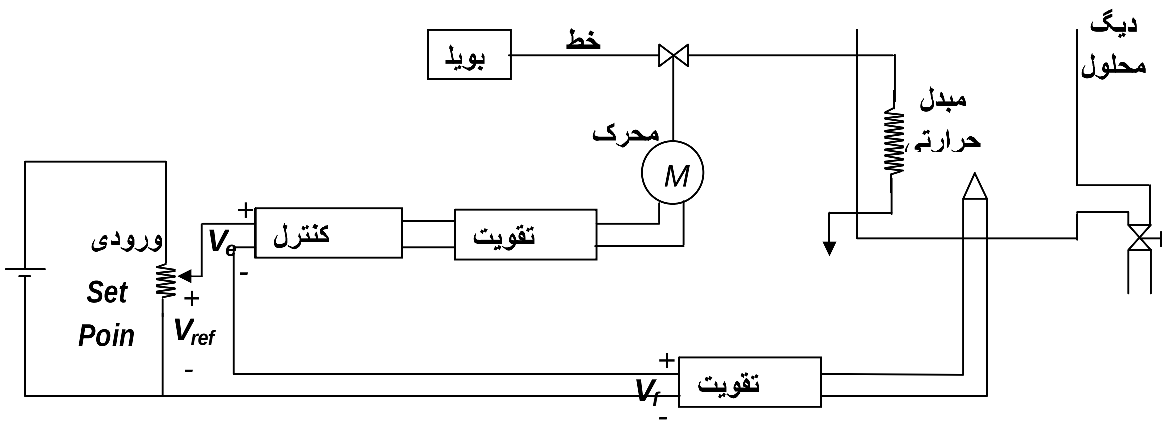
$V_e = V_{ref} + V_f$

فیدبک منفی :



$V_e = V_{ref} - V_f$

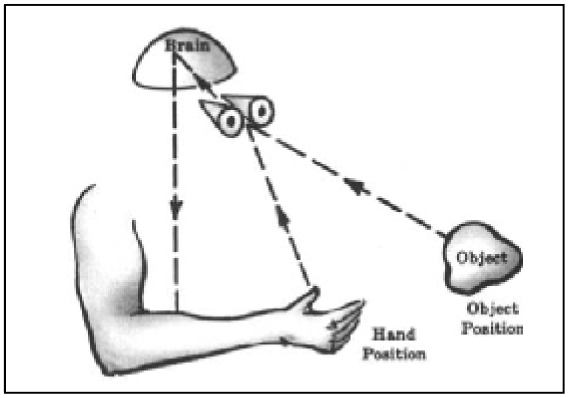
مثال ۱) در سیستم زیر یک فرآیند کنترل دمای محصول داخل دیگ مشاهده می شود. در این سیستم ورودی میزان دمای مطلوب داخل دیگ است و خروجی دمائی است که در هر لحظه توسط ترموکوپل اندازه گیری می شود و نمایش داده می شود. مبدل حرارتی عمل انتقال حرارت را از بخار داخل خود به محصول را انجام می دهد. و دبی بخار عبوری از مبدل حرارتی توسط شیر کنترل می شود. میزان باز یا بسته بودن شیر به محرک تنظیم می شود و سیگنالی که به محرک داده می شود سیگنال کنترلی است که از خروجی تقویت کننده بدست می آید.



اجزا اصلی یک سیستم کنترل :

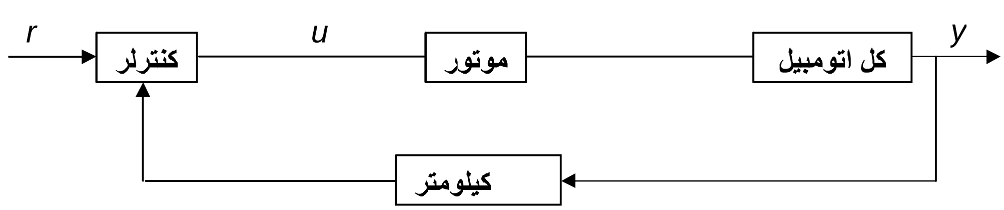
بطور کلی برای هر سیستم کنترلی می توان سه جزء اصلی در نظر گرفت که عبارتند از :

1. **سنسور**
2. **کنترلر**
3. **محرک**



سنسور مانند چشم در یک سیستم کنترلی عمل میکند. کنترلر بمانند مغز و محرکها بازوان یک سیستم کنترلی هستند

مثال ۲) فرض می کنیم اتومبیلی در سطح جاده با شیب متغیر در حرکت است چنان چه به ازای یک درجه چرخش پدال گاز اتومبیل سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت تغییر کند و به ازا یک درصد تغییر در شیب جاده ۵ کیلومتر بر ساعت سرعت تغییر کند آنگاه معادلات سیستم را در حالت حلقه باز و حلقه بسته بنویسید:



r : سرعت مطلوب اتومبیل

u : چرخش پدال گاز اتومبیل

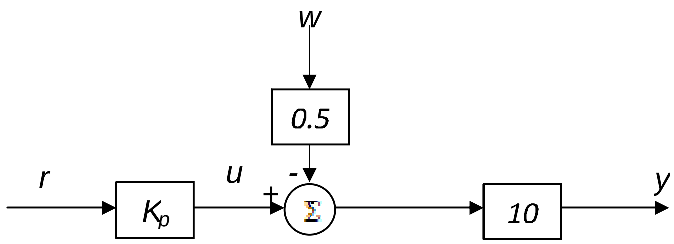
y : سرعت ماشین

w : شیب جاده

حل: با استفاده از صورت مسئله می توان یک معادله بصورت زیر برای سیستم بدست آورد:

$$y = 10u - 5w = 10(u - 0.5w)$$

الف) طراحی در حالت حلقه باز :



$$u = r * k_p$$

$$y = 10(u - 0.5w) = 10\left(r * k_p - 0.5w\right) = 10 * r * k_p - 5w$$

اگر بخواهیم در حالتی که شیب جاده صفر است سرعت اتومبیل با مقدار مطلوب یکی شود باید $k_p = {}^{1}/_{10}$ را قرار دهیم:

$$y = r - 5w$$

اگر سرعت مطلوب $50\ {}^{km}/_{h}$ باشد داریم :

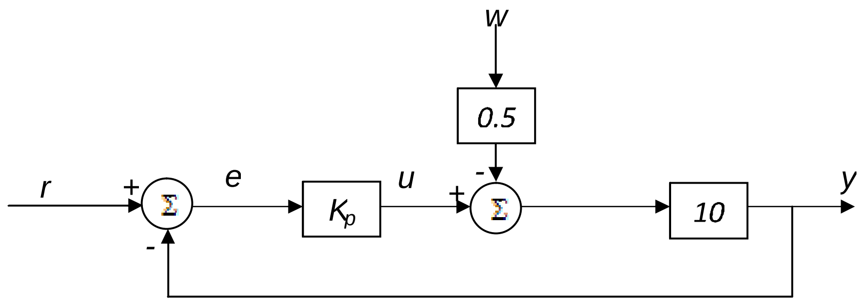
$$w = 0 \implies y = 50 - 0 = 50\left({}^{km}/_{h}\right)$$

$$w = 1 \implies y = 50 - 5 = 45\left({}^{km}/_{h}\right)$$

$$w = 2 \implies y = 50 - 10 = 40\left({}^{km}/_{h}\right)$$

ملاحظه می شود که در حالت کنترل حلقه باز سرعت اتومبیل چقدر زیاد به شیب جاده (اغتشاش) وابسته است بطوریکه به ازاء هر یک درصد شیب جاده $5Km$ از سرعت اتومبیل کاسته می شود.

طراحی در حالت حلقه بسته :



$e = r - y$

$u = e * k_p$

$y = 10(u - 0.5w) = 10(e * k_p - 0.5w)$

$\Longrightarrow 10(r - y) * k_p - 5w$

$\Longrightarrow 10k_p * r - 10k_p * y - 5w$

$\Longrightarrow y(1 + 10k_p) = 10k_p * r - 5w$

$$\Longrightarrow y = \frac{10k_p * r - 5w}{1 + 10k_p}$$

با فرض این که $k_p = 100$ باشد داریم :

$$y = \frac{1000}{1001} r - \frac{5}{1001} w = 0.999r - 0.005w$$

اگرسرعت مطلوب $50\, {km}/{h}$ باشد داریم :

1. $w = 0 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 = 49.95({km}/{h})$
2. $w = 1 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 - 0.005 = 49.945\left({km}/{h}\right)$
3. $w = 2 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 - 0.01 = 49.94\left({km}/{h}\right)$

تبدیل لاپلاس: عملیات مربوط به تبدیل لاپلاس و عکس آن جزء لاینفک تحلیل سیستمهای کنترل خطی است.

در ادامه یادآوری در مورد تبدیل لاپلاس و عکس آن آورده شده است

اگر $f(t)$ را به عنوان یک تابع وابسته به زمان در نظر بگیریم، تبدیل آن را بصورت $F(s)$ تعریف میکنیم. جدول صفحه بعد تبدیل لاپلاس چند تابع پر کاربرد را نشان می دهد:

یکی از عملیات مهمی که در کنترل مورد نیاز است تجزیه یک کسر به عاملهای اول است تا بتوان لاپلاس معکوس آن را بدست آوریم. در ادامه روشهای تجریه کسر را با ذکر چند مثال مرور می کنیم:

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید و مقدار آنرا در زمان بینهایت بدست آورید:

$$Y(s) = \frac{4(s+50)}{s(s+20)(s+10)}$$

ابتدا تابع را بصورت زیر به کسرهای عامل اول تجزیه می کنیم:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+20} + \frac{A_3}{s+10}$$

سپس مقادیر مجهول را بدست می آوریم:

$$A1 = lim_{S\to 0}[Y(S).S] = 1$$

$$A2 = lim_{S\to -20}[Y(S).(S+20)] = 0.6$$

$$A3 = lim_{S\to -10}[Y(s).(S+10)] = -1.6$$

و با محاسبه لاپلاس معکوس هر عبارت خواهیم داشت:

$$y(t) = 1 + 0.6e^{-20t} - 1.6e^{-10t}\ .$$

و مقدار نهائی را می توان با استفاده از قضیه مقدار نهائی لاپلاس بصورت زیر بدست آورد:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{4(s+50)}{s(s^2+30s+200)}\right] = 1$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}=\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s)=b_2+\frac{c_{11}}{s+1}+\frac{c_{21}}{s+2}$$

با توجه به اینکه درجه صورت و مخرج با هم برابرند پس ضریب ثابت وجود دارد و مقدار آن از نسبت بزرگترین درجه صورت و مخرج بدست می آید و در اینجا برابر ۱ است.

$$c_{11}=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\frac{s^2+2s+2}{s+2}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$c_{21}=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{s^2+2s+2}{s+1}\bigg|_{s=-2}=-2$$

پس از تجزیه کسر می توان لاپلاس معکوس را بصورت زیر بدست آورد:

$$F(s)=1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right]=\mathscr{L}^{-1}[1]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]=\delta(t)+e^{-t}-2e^{-2t}$$

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$F(s)=\frac{c_{11}}{s+1}+\frac{c_{12}}{(s+1)^2}+\frac{c_{21}}{s+2}$$

$$c_{11}=\frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)\bigg|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=-1}=-1$$

$$c_{12}=(s+1)^2F(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$c_{21}=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=1$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$T(S)=\frac{1+S}{S(S+2)^3(S+4)}$$

حل: تابع فوق را می توان به شکل زیر ساده کرد.

$$\frac{A}{S}+\frac{B}{S+4}+\frac{C}{(S+2)^3}+\frac{D}{(S+2)^2}+\frac{E}{S+2}$$

$$A=\lim_{S\to 0}[T(S).S]=\frac{1}{32}$$

$$B=\lim_{S\to -4}[T(S).(S+4)]=\frac{-3}{-4(-4+2)^3}=\frac{-3}{32}$$

$$C=\lim_{S\to -2}[T(s).(S+2)^3]=\frac{1}{4}$$

$$D=\lim_{S\to -2}\frac{d}{ds}[T(s).(S+2)^3]=\lim_{S\to -2}\frac{d}{ds}\left[\frac{S+1}{S^2+4S}\right]$$

$$=\lim_{S\to -2}\left[\frac{S^2+4S-(2S+4)(S+1)}{(S^2+4S)^2}\right]=\lim_{S\to -2}\left[\frac{-S^2-2S-4}{(S^2+4S)^2}\right]=\frac{-1}{4}$$

$$E=\lim_{S\to -2}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[T(S).(S+2)^3]$$

$$E=\lim_{S\to -2}\frac{1}{2}\left[\frac{(-2S-2)(S^2+4S)^2-[2(2S+4)(S^2+4S)(-S^2-2S-4)]}{(S^2+4S)^4}\right]$$
$$=\frac{-13}{256}$$

$$T(s)=\frac{1}{32}.\frac{1}{S}-\frac{3}{32}.\frac{1}{S+4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{(S+2)^3}-\frac{1}{4}.\frac{1}{(S+2)^2}-\frac{13}{256}.\frac{1}{S+2}$$

$$\boxed{T(s)=\frac{1}{32}u(t)-\frac{3}{32}e^{-4t}u(t)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2!}t^2e^{-2t}u(t)-\frac{1}{4}te^{-2t}u(t)-\frac{13}{256}e^{-2t}u(t)}$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

در مواقعی که تابع دارای قطب مختلط است یک راه موثر استفاده از روش زیر است . در این روش قطب مختلط را بصورت مرتبه دو قرار می دهیم و صورت آن را جمله ای با مرتبه یک s فرض می کنیم و با برابر قرار دادن آن با تابع اصلی، ضرایب مجهول بدست می آید

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$1 = a_1(s^2 + 2s + 2) + (a_2 s + a_3)s$$

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad 2a_1 + a_3 = 0, \qquad 2a_1 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = -1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2 + 1^2} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t, \qquad \text{for } t \geq 0$$

تجزیه کسر به عاملهای اول بصورت گرافیکی:

یک روش تجزیه کسر به عاملهای اول استفاده از روش گرافیکی برای تعیین ضرایب مانده ها است.

برای بررسی این روش ابتدا به چند تعریف می پردازیم:

تابع $F(S)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)}, \qquad \text{for } m < n$$

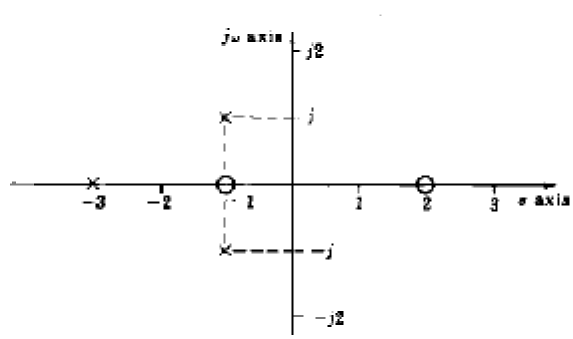
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

که در آن درجه مخرج از صورت بزرگتر است. در این تابع مقادیر $zi, (i = 1,2, \dots m)$ و pi مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. مقادیر $s = -zi$ که ریشه های صورت F(s) هستند و F(s) را صفر می کنند صفرهای تابع نامیده می شوند و مقادیر $s = -pi$ که ریشه های مخرج F(s) هستند و F(s) را بینهایت می کنند

قطبهای تابع نامیده می شوند. همچنین به $ak,(k=1,2,..n)$ ضرایب مانده در قطب pk نامیده می شود که مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. بعنوان مثال ضریب $a1$ مانده قطب $p1$ و ضریب $a2$ مانده در قطب $p2$ و ... می باشد. در روش محاسبه گرافیکی ضرایب مانده که در ادامه گفته می شود می خواهیم مقادیر $ak,(k=1,2,..n)$ را بصورت ترسیمی بدست آوریم. این روش خصوصاً زمانی که تابع $F(s)$ دارای قطبها و صفرهای مختلط متعدد باشد بسیار مفید است. لازم به ذکر است که این روش برای ریشه های تکراری مورد استفاده قرار نمی گیرد.

همانطور که گفته شد صفر ها و قطبها می توانند مقادیر مختلط باشند. بنابر این برای رسم آنها باید صفحه ای مختلط در نظر گرفت که صفحه مختلط s نامیده می شود. اگر متغیر مختلط $s = \sigma + jw$ را تعریف کنیم در این صفحه محور افقی محور حقیقی است که با $Re\,[s]$ و یا σ نمایش داده می شود و محور عمودی، محور موهومی است که با $Im[s]$ و یا jw مشخص می شود. در این صفحه صفرها با علامت دایره و قطبها با علامت ضربدر در مختصات خودشان قرار می گیرند. در شکل زیر بعنوان مثال قطبها و صفر های تابع $F(s)$ را در صفحه s رسم کرده ایم.

$$F(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$



برای محاسبه ضریب مانده ak بصورت زیر عمل می کنیم:

۱- از تمام صفر ها و قطبهای موجود یک بردار به قطب pk رسم می کنیم (انتهای بردارها روی قطب pk قرار دارد)

۲- اندازه تمام بردارهای رسم شده را با توجه به مختصات ابتدا و انتهای آنها بدست می آوریم.

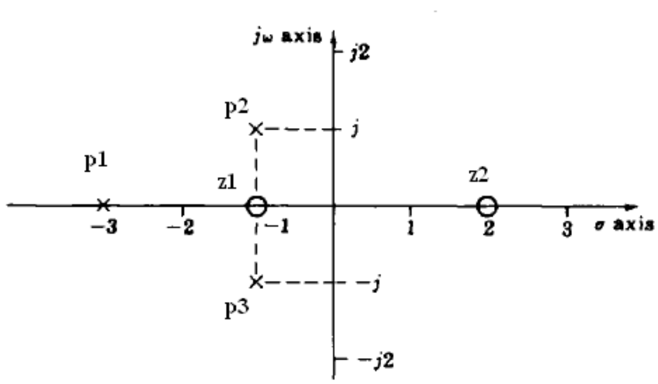
۳- زاویه ای را که هر بردار با محور حقیقی مثبت در صفحه s تشکیل می دهد را محاسبه می کنیم.

۴- ضریب ak را که یک عدد مختلط است را بصورت $ak = |ak| < \varphi k$ در نظر میگیریم.

۵- اندازه ak = (حاصلضرب اندازه بردارهائی که از صفر ها شروع می شود) تقسیم بر (حاصلضرب اندازه بردارهائی که از قطب ها شروع می شود)

۶- زاویه ak = (مجموع زاویه های بردارهائی که از صفر ها شروع می شود) منهای (مجموع زاویه های بردارهائی که از قطبها شروع می شود)

بعنوان یک مثال می خواهیم تابع $F(s)$ را که در بالا دیدیم به کسرهای جزئی تبدیل کنیم. با توجه به اینکه سه قطب وجود دارد پس سه جمله داریم: $F(s) = \frac{a1}{s+3} + \frac{a2}{s+1+j} + \frac{a3}{s+1-j}$



اندازه ها را بصورت زیر بد

$$|a1| = \frac{|\overrightarrow{z1p1}|*|\overrightarrow{z2p1}|}{|\overrightarrow{p2p1}|*|\overrightarrow{p3p1}|} = \frac{2*5}{\sqrt{5}*\sqrt{5}} = 2$$

$$|a2| = \frac{|\overrightarrow{z1p2}|*|\overrightarrow{z2p2}|}{|\overrightarrow{p1p2}|*|\overrightarrow{p3p2}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

$$|a3| = \frac{|\overrightarrow{z1p3}|*|\overrightarrow{z2p3}|}{|\overrightarrow{p1p3}|*|\overrightarrow{p2p3}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

و برای زاویه ها داریم:

$$\varphi1 = (< z1p1 + < z2p1) - (< p2p1 + < p3p1) = (180+180) - \left((180 + tan^{-1}\tfrac{1}{2}) + (180 - tan^{-1}\tfrac{1}{2})\right) = 0$$

$$\varphi2 = (< z1p2 + < z2p2) - (< p1p2 + < p3p2) = \left(90 + (180 - tan^{-1}\tfrac{1}{3}\right) - \left((tan^{-1}\tfrac{1}{2}) + 90\right) = 135$$

$$\varphi3 = (< z1p3 + < z2p3) - (< p1p3 + < p2p3) = \left(-90 + (180 + tan^{-1}\tfrac{1}{3}\right) - \left((-tan^{-1}\tfrac{1}{2}) - 90\right) = -135$$

در نتیجه ضرایب مانده بصورت زیر خواهد شد:

$$a1 = 2$$
$$a2 = 0.707 < 135 = -0.5 + j0.5$$
$$a3 = 0.707 < -135 = -0.5 - j0.5$$

ملاحظه می شود که قطب حقیقی دارای مانده حقیقی و است و فقط از روی زاویه علامت آنرا بدست می آوریم و همچنین چون قطبهای مختلط حتماً بصورت مزدوج هستند در نتیجه مانده آنها هم بصورت مزدوج است و فقط کافی است یکی از آنها بدست آید.

$$F(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{-0.5+j0.5}{s+1+j} + \frac{-0.5-j0.5}{s+1-j}$$

تمرین)لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید؟

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

$$X_{(s)} = \frac{7s + 2}{(s+1)(s+3)^3}$$

فصل دوم

مدل سازی ریاضی سیستمهای فیزیکی

روش های نمایش و مدل کردن سیستم های کنترلی:

۱. معادله دیفرانسیل مرتبه بالا یا *HODE (High Order Differential Eqution)*

۲. تابع تبدیل یا *TF (Transfer Function)*

- نمایش و ساده سازی با استفاده از دیاگرام بلوکی
- نمایش و ساده سازی بصورت نمودار گذر سیگنال و فرمول بهره میسون

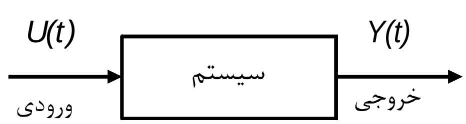
۳. معادلات حالت یا *SS (State-Space)*

۴. نمودار حالت یا *SD (State-Diagram)*

از این چهار روش دو روش اول در این فصل تحت عنوان مدلسازی ریاضی مورد بررسی قرار می گیرند و دو روش بعدی در فصل آینده خواهند بود.

نمایش سیستم بصورت *HODE*:

مدل ریاضی سیستم ها:



مدلسازی ریاضی برای سیستمهای کنترل به معنی یافتن یک رابطه بین متغیرهای سیستم بصورت زیر است.

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y', y, u^{(m)}, \dots \quad u', u)$$

که این رابطه در اصل یک معادله دیفرانسیل را بین ورودی و خروجی و مشتقات آنها ایجاد می کند که می توانیم توسط آن روابط موجود در سیستم کنترلی را بدست آوریم یا بعبارت دیگر سیستم را بصورت $HODE$ نمایش دهیم یا مدل کنیم.

انواع متغییرها در سیستم های فیزیکی:

۱. $Variable\ Across\ Element$: متغییرهایی که نسبت به یک مبنا سنجیده می شوند یا نسبت به دو سر یک المان اندازه گیری می شوند. مثل: اختلاف پتانسیل، اختلاف فشار، اختلاف سرعت، اختلاف دما

۲. $Variable\ Through\ Element$: متغییرهای که به شکل عبور از یک المان یا جسم اندازه گیری می شوند. مثل: جریان، نیرو، دبی، گشتاور

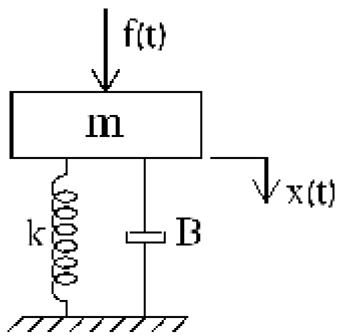
به طور کلی برای هر سیستم فیزیکی سه المان اصلی وجود دارد:

۱. المان مصرف کننده
۲. المان ذخیره کننده
۳. المان القاء کننده

قوانین حاکم	المان القاء کننده	المان ذخیره کننده	المان مصرف کننده	متغییر عبوری	متغییر ظرفیتی	
KCL,KVL	$v = L\frac{di}{dt}$ سلف	$i = C\frac{dv}{dt}$ خازن	$i = \frac{1}{R}v$ مقاومت	$i(t)$ جریان	$v(t)$ ولتاژ	سیستم های الکتریکی
$\sum F= m.a$	$V = \frac{1}{K}\frac{dF}{dt}$ فنر	$F = M\frac{dV}{dt}$ جرم	$F=B.V$ دمپر	$F[N]$ نیرو	$V\left[\frac{m}{s}\right]$ سرعت	سیستم های مکانیکی
$\sum T=J.a$	$w = \frac{1}{K}\frac{dT}{dt}$ فنر چرخشی	$T = J\frac{dw}{dt}$ ممان اینرسی	$T = B.W$ دمپر چرخشی	$T[N.M]$ گشتاور	$W\left[\frac{rad}{s}\right]$ سرعت زاویه ای	سیستم های مکانیکی چرخشی
اصل بقاء جرم و انرژی	$P = I\frac{dQ}{dt}$ اینرسی سیال	$Q = Cf\frac{dP}{dt}$ ظرفیت سیال	$Q = \frac{1}{Rf}.P$ مقاومت سیال	$Q\left[\frac{m^3}{s}\right]$ دبی	$P[p]$ فشار	سیستم سیالات

تذکر: از مقایسه سیستمهای الکتریکی و مکانیکی نتیجه می شود که برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی بکمک المانهای الکتریکی، مقاومت وسلف بکار رفته در سیستم الکتریکی باید مقادیر عکس دمپر و فنر در سیستم مکانیکی داشته باشند.

مثال(۱-۲) : مدل ریاضی سیستم زیر را بدست آورید.



حل: در اینگونه مثالها همواره معادلات را برای حالت تعادل سیستم بدست می آوریم یعنی فرض میشود که وزن جرم با نیروی اولیه فنر خنثی شده است.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\sum F = m.a$$

$$f(t) - F_K - F_B = m.a$$

اگر خروجی سیستم را سرعت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر است:

$$f(t) - K\int_0^t v(t)dt - B.v(t) = m\frac{dv(t)}{dt}$$

و اگر خروجی سیستم را موقعیت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر خواهد بود:

$$f(t) - K.x(t) - B\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

که عبارت ساده شده آن بشکل مقابل است:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

مثال (۲-۲): سیستم مثال قبل را به یک سیستم الکتریکی تبدیل کنید.

حل: معادلات را بر حسب سرعت جرم باز نویسی می کنیم.

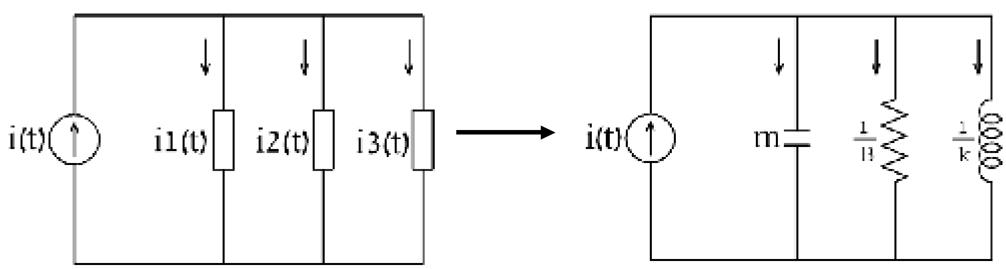
$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + B.v(t) + K\int_0^t v(t)$$

ملاحضه می شود که نیروی وارد شده به سیستم به سه بخش تقسیم می شود. اگر نیرو را معادل جریان قرار دهیم که هر دو از نوع متغیر عبوری هستند دیده می شود که جریان باید بین سه شاخه تقسیم شود. پس مدار الکتریکی بصورت موازی خواهد بود که توسط یک منبع جریان تغذیه می شود.

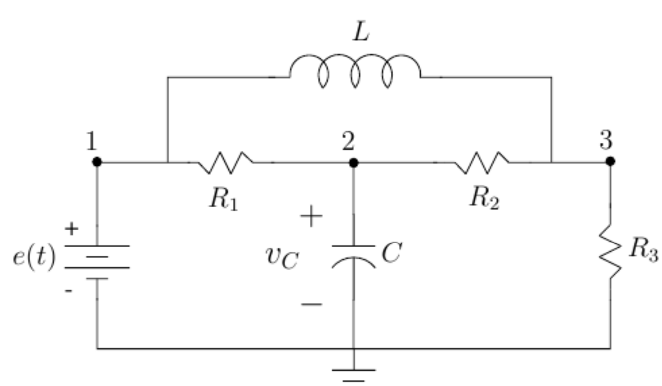
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i(t) = c\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{R}V(t) + \frac{1}{L}\int_0^t V(t)dt$$

در نتیجه یک مدار RLC موازی داریم که مقادیر آن بر حسب اجزاء سیستم مکانیکی بصورت زیر است.



مثال (۳-۲): معادلات دینامیکی را برای سیستم الکتریکی زیر بدست آورید:



با نوشتن معادلات KCL برای گره های ۲ و ۳ معادلات زیر را خواهیم داشت. توجه کنید که چون سیستم دارای دو عنصر ذخیره کننده انرژی است معادلات دینامیکی آن می تواند از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول، یا یک معادله مرتبه دوم تشکیل شود.

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + C\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} = 0$$

$$\frac{v_3}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} + \frac{1}{L}\int_0^t (v_3(\tau) - v_1(\tau))d\tau = 0$$

برای سادگی تمامی مقادیر المانهای مدار را یک فرض می کنیم. همچنین فرض می کنیم که خروجی مدار $vc(t)$

و ورودی آن e باشد. بنابراین رابطه ورودی و خروجی سیستم را می توان توسط دو معادله زیر که بوسیله متغییر $v3$ به همدیگر مرتبط هستند نمایش داد:

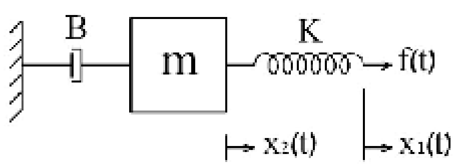
$$(v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) = 0$$

$$v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau))d\tau = 0$$

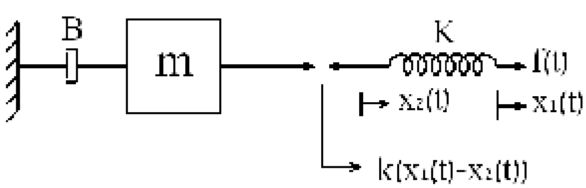
با حذف $v3$ از دو معادله فوق می توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را بصورت یک معادله مرتبه دو نمایش داد:

$$\frac{d^2vc}{d^2t} + 2\frac{dvc}{dt} + vc = \frac{de}{dt} + e$$

مثال(۴-۲) : معادلات دینامیکی را برای سیستم زیر بدست آورید.



حل:



معادلات برای سیستم حالت تعادل(جسم آزاد) برای فنر و جسم بصورت زیر است:

$$f(t) = k\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$

$$k\big(x_1(t) - x_2(t)\big) - B.\frac{dx_2(t)}{dt} = m.\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}$$

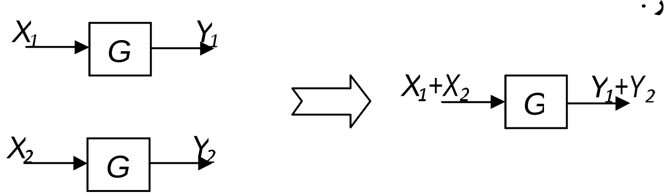
و از آنجا با توجه به اینکه در سیستم دو جابجائی داریم، دو معادله دیفرانسیل نیز خواهیم داشت که بصورت دستگاه زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) + \dfrac{1}{k} f(t) \\ \dfrac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \dfrac{B}{m}\dfrac{dx_2}{dt} + \dfrac{k}{m}.x_2(t) = \dfrac{k}{m}.x_1(t) \end{cases}$$

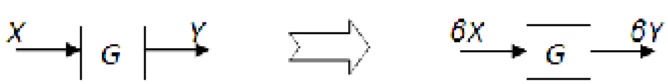
خواص سیستمهای خطی :

اکثر سیستمهای فیزیکی در محدوده مشخصی از متغییرها بصورت خطی عمل میکنند. ولی در صورتی که دامنه متغییرها خیلی زیاد شوند رفتار غیر خطی از خود بروز می هند. برای اینکه یک سیستم رفتار خطی داشته باشد دو شرط زیر را باید دارا باشد

الف) خاصیت ترکیب یا جمع آثار :



ب) خاصیت همگنی :



مثال (۵-۲): خواص سیستمهای زیر را مشخص کنید :

$y = x^2$ (خاصیت ترکیب و همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست)

$y = mx + b$ (خاصیت همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست)

در سیستم دوم خاصیت همگنی وجود ندارد و سیستم غیر خطی است ولی با این وجود در صورتی که تغییرات ورودی و خروجی کوچک باشد می توان این سیستم را حول یک نقطه کار مانند x_0 و y_0 خطی کرد. وقتی که $x = x_0 + \Delta x$ و $y = y_0 + \Delta y$ آنگاه داریم:

که $\Delta y = m\Delta x$ هر دو شرط فوق را داراست و خطی است. در ادامه روال کلی خطی کردن یک سیستم را در محدوده تغییرات محدود متغییرها، حول یک نقطه کار بررسی می کنیم.

خطی کردن سیستمهای کنترل حول نقطه کار :

در سیستم $y(t) = g(x(t))$ که در آن $g(x(t))$ نشان می دهد که $y(t)$ تابعی از $x(t)$ است، این سیستم در نقطه کار x_0 دارای یک نقطه پیوسته است وبسط تیلور در آن صادق است.

$$y = g_{(x)} = g_{(x_0)} + \frac{dg}{dx}\Big|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{d^2g}{dx^2}\Big|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

با فرض این که $(x - x_0)$ خیلی کوچک باشد داریم :

$$y = g_{(x)} = g_{(x_0)} + \frac{dg}{dx}\Big|_{x=x_0}(x - x_0)$$

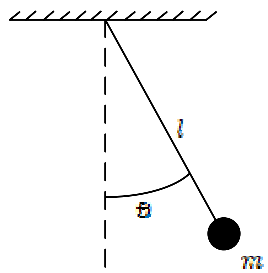
$$\Longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$$

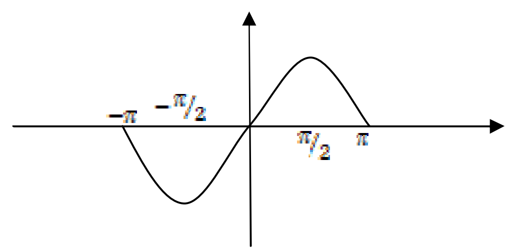
که در آن $m = \frac{dg}{dx}\Big|_{x=x_0}(x - x_0)$ شیب منحنی در نقطه کار است.

$$\Longrightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \text{یا} \qquad \Delta\, y = m.\Delta\, x$$

که در محدوده نقطه کار یک سیستم خطی است.

مثال(۶-۲): مدل نوسان پاندول:





در این مثال می خواهیم یک مدل برای گشتاور ناشی از حرکت دورانی یک جرم را بدست آوریم. گشتاور جرم این پاندول برابراست با:

$$T = mgl\sin\theta$$

که در آن g ثابت جاذبه است.

درحالت تعادل $\Longrightarrow T_0 = 0\,, \theta_0 = 0$

حال تقریب خطی را با استفاده از مشتق اول سیستم در نقطه تعادل بدست می آوریم:

$$T = T_{(\theta_0)} + \frac{dT}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Longrightarrow T = T_0 + mgl\cos(\theta)|_{\theta=0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Longrightarrow T - T_0 = mgl\cos(0) * (\theta - 0)$$

$$\Longrightarrow T = mgl\theta \qquad \forall \qquad -\pi/_4 \le \theta \le \pi/_4$$ در محدوده نقطه تعادل

مثال (۷-۲): ترمیستوری دارای پاسخ دمائی زیر است:

که در آن $R_0 = 10{,}000\Omega$ ، مقاومت= R و دما = T بر حسب سلسیوس است. مدل خطی را برای کار ترمیستور در دمای $T = 20^{\circ}c$ و تغییرات کوچکی از دما را پیدا کنید.

حل: تابع $f(T)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$f(T) = R = R_0 e^{-0.1T}$$

حال داریم:

$$\Delta R = f(T) - f(T_0)\ , \quad \Delta T = T - T_0\ .$$

$$\Delta R = f(T) - f(T_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{T=T_0=20^{\circ}} \Delta T + \cdots$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{T=T_0=20^{\circ}} = -0.1 R_0 e^{-0.1T_0} = -135,$$

و در نهایت با قرار دادن مقادیر ثابت داریم:

$$\Delta R = -135\Delta T$$

که یک رابطه خطی بین تغییرات مقاومت و تغییرات محدود دما را در ترمیستور نمایش می دهد.

مثال (۸-۲): خروجی y و ورودی x از یک سیستم بصورت زیر با هم مرتبط هستند:

$$y = x + 1.4x^3$$

الف) مقادیر خروجی را برای حالت ماندگار در دو نقطه کار $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ بدست آورید.

ب) مدل خطی را برای دو هر دو نقطه بدست آورید و با هم مقایسه کنید.

حل: الف) مقادیر خروجی در حالت مانگار به راحتی از قرار دادن نقطه کار در معادله بدست می آید:

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2.4$$
$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 13.2$$

ب) معادله خطی بصورت $y = m\Delta x$ خواهد بود که در آن m بصورت زیر تعریف می شود:

$$m = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_o}$$

بنابر این در هر یک از نقاط کار خواهیم داشت:

$$m = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_o} = 1 + 4.2x_o^2\ .$$

که داریم:

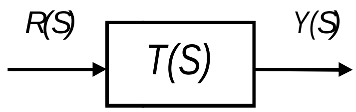
$$x_0 = 1 \Rightarrow m = 5.2 \qquad , \qquad x_0 = 2 \Rightarrow m = 18.8$$

تمرین (۱-۲): یک فنر که در یک کمک فنر بکار رفته است نیروی f را بصورت رابطه $f = kx^4$ تولید می کند. که در آن x جابجائی فنر است. یک مدل خطی برای فنر وقتی $x_0 = 1$ است بدست آورید.

نمایش سیستم بصورت TF :

تابع تبدیل:

برای هر سیستم کنترلی تابع تبدیل به صورت زیر تعریف میشود، مشروط برآنکه **<u>تمام شرایط اولیه صفر</u>** باشد.

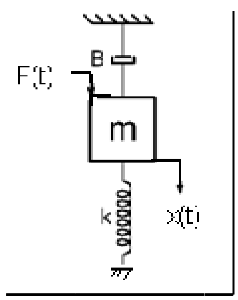


$$\boldsymbol{T(S)} = \frac{\text{لاپلاس خروجی}}{\text{لاپلاس ورودی}} = \frac{\boldsymbol{Y(S)}}{\boldsymbol{R(S)}}$$

تابع تبدیل برای سیستم های خطی غیر متغیر با زمان تعریف می شود وتنها رابطه یک خروجی نسبت به یک ورودی در یک سیستم را بیان می کند.

مثال(۹-۲): در سیستم زیر تابع تبدیل را به دست آورید.

ورودی : $f(t)$ خروجی : $x(t)$



حل: در بخش قبلی معادله دینامیکی سیستم را بدست آورده ایم:

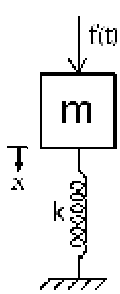
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل کافیست از معادله دینامیک سیستم که رابطه خروجی و ورودی سیستم را بیان می کند، تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$mS^2X(S) + BSX(S) + KX(S) = F(S) \Rightarrow T(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2+BS+K}$$

مثال(۸-۲): برای سیستم زیر ابتدا تابع تبدیل را بدست آورید،

سپس پاسخ را به ازاء ورودی ضربه $\delta(t)$ بررسی کنید.



حل:

$$f(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + kx \rightarrow F(S) = mS^2.X(S) + KX(s)$$

$$T(S) = \frac{X(S)}{F(s)} = \frac{1}{mS^2+K} \quad \leftarrow$$ تابع تبدیل سیستم

$$X(S) = \frac{F(S)}{mS^2+K} = \frac{1}{mS^2+K} = \frac{1}{m}.\frac{1}{S^2+\frac{K}{m}} = \frac{1}{m}.\frac{1}{S^2+\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2}.\frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$L^{-1} \rightarrow x(t) = \frac{1}{\sqrt{mK}}.sin(\sqrt{\frac{K}{m}}t)\,u(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

مشاهده می شود که در این سیستم چون هیچ عنصر تلف کننده انرژی (دمپر) وجود ندارد بنابر این خروجی سیستم دائما بصورت نوسانی است و هیچگاه به حالت مانا نخواهد رسید.

مثال(۹-۲) تابع تبدیل مثال (۳-۲) را بدست آورید.

حل: از مثال (۳-۲) دو معادله بدست آمده برای سیستم را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}(v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) &= 0\\ v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau))d\tau &= 0\end{aligned}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(V_C - E) + sV_C + (V_C - V_3) &= 0\\ V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) &= 0\end{aligned}$$

از معادله اول می توان ولتاژ گره ۳ را بدست آورد:

$$V_3 = (s+2)V_C - E$$

و با جایگذاری در معادله پائین و چند عملیات ساده بدست می آوریم:

$$V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (s+2)V_C - E + ((s+2)V_C - E - V_C) + \frac{1}{s}((s+2)V_C - E - E) = 0$$

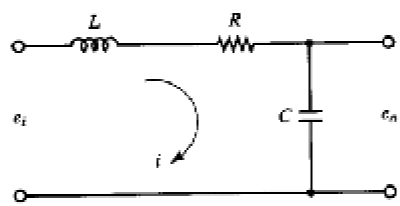
$$\Leftrightarrow \quad s(s+2)V_C - sE + s(s+1)V_C - sE + (s+2)V_C - 2E = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad V_C(2s^2 + 4s + 2) = E(2s + 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_C}{E} = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_C}{E} = \frac{1}{s+1}$$

مثال(۱۰-۲) تابع تبدیل مدار RLC زیر را بدست آورید:



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات و با فرض اینکه ورودی سیستم ei و خروجی آن eo باشد، خواهیم داشت:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

مثال(۱۱-۲) اگر در سیستمی با تابع تبدیل زیر $r(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی باشد، $y(t)$ را به ازاء ورودی پله واحد بدست آورید: $\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{10(S+2)}{S^2+8S+15}$

اگر ورودی بصورت پله واحد باشد، خروجی بصورت زیر خواهد بود که با تجزیه کسر و عکس تبدیل لاپلاس به پاسخ مطلوب می رسیم: $Y(S) = \frac{10(S+2)}{S(S+3)(S+5)}$

$$Y(s) = \frac{4}{3s} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+3} - 3\frac{1}{s-5} \qquad y(t) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}e^{-3t} - 3e^{-5t}$$

تمرین (۲-۲): در سیستم مثال(۴-۲) تابع تبدیلهای زیر را بدست آورید.

تمرین(۳-۲): در سیستم جرم و فنر(مثال۹) با فرض ورودی پله $u(t)$ پاسخ را بدست آورید و رسم کنید.

چند تعریف در مورد تابع تبدیل:

فرض کنیم تابع تبدیل برای یک سیستم بصورت $T(S) = \frac{P(S)}{q(S)}$ موجود باشد که در آن $p(S)$و $q(S)$ دو چند جمله ای برحسب S هستند. اولین شرط برای بررسی این سیستم این است که درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر نباشد. این شرط به این مفهوم است که سیستم علی باشد. اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد یعنی سیستم علی نیست.

وقتی چند جمله ای مخرج، $q(s)$ را برابر صفر قرار می دهیم، آن را **معادله مشخصه سیستم** می گوئیم. زیرا ریشه های این معادله مشخصه پاسخ زمانی را تعیین می کند. ریشه های این معادله را **قطبهای سیستم** می نامند. و ریشه های چند جمله ای صورت، $p(s)$ را صفر های سیستم می نامند. قطبها و صفرها فرکانسهای بحرانی سیستم را تشکیل می دهند. قطبها پاسخ سیستم را بینهایت می کنند و صفرها پاسخ را صفر می کنند. نمودار قطبها و صفرهای یک سیستم را می توان در صفحه مختلط S بصورت گرافیکی رسم کرد.

مثال (۱۲-۲): تابع زیر مفروض است:

$$Y(S) = \frac{S+3}{S^2+3S+2} = \frac{S+3}{(S+1)(S+2)}$$

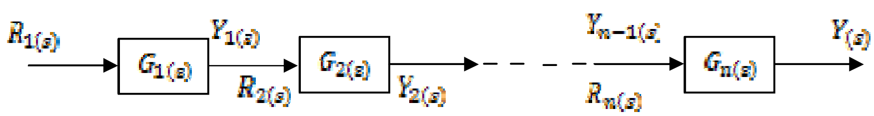
که در آن معادله $S^2+3S+2=0$ معادله مشخصه سیستم است. $S=-1$ و $S=-2$ قطبهای تابع و $S=-3$ صفر تابع است. قطبها و صفرهای تابع را می توان بصورت گرافیکی نیز مشاهده کرد که در فصل اول مورد بررسی قرار گرفت.

دیاگرام بلوکی : یک روش برای نمایش سیستمهای کنترلی در حالت تابع تبدیل استفاده از نمودار بلوکی است. در نمودار بلوکی هر بخش از سیستم توسط یک بلوک نمایش داده می شود که تابع تبدیل آن داخل بلوک نوشته می شود.

$$G_{(s)}=\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}}$$

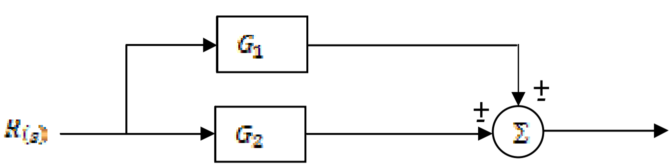
در ادامه چند معادل پر کاربرد را در ساده سازی نمودارهای بلوکی مشاهده می کنیم.

- **ترکیب سری :**



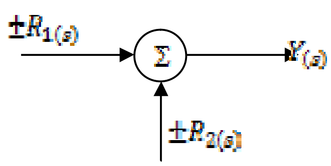
$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}}=G_{1(s)}*G_{2(s)}*\ldots*G_{n(s)}$$

- **ترکیب موازی :**



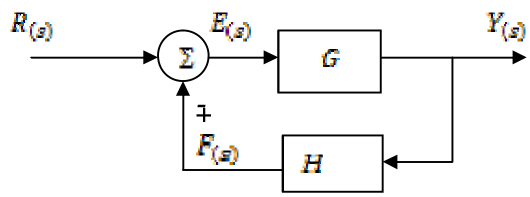
$$Y_{(s)}=R_{(s)}(\pm G_1\pm G_2)$$

- **بلوک جمع کننده :**



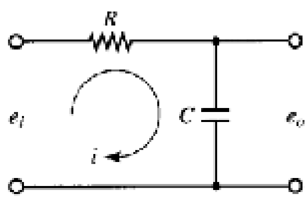
$$Y_{(s)}=\pm R_{1(s)}\pm R_{2(s)}$$

- **فیدبک** : تابع تبدیل معادل برای یک حلقه فیدبک بصورت زیر بدست می آید.



$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{G}{1\pm GH}$$

مثال(۱۳-۲) دیاگرام بلوکی سیستم زیر را رسم کنید.



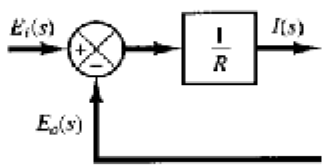
با نوشتن معادلات دینامیک برای سیستم و انتقال آن به

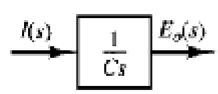
حوزه لاپلاس با فرض صفر بودن شرایط اولیه داریم:

$$i=\frac{e_i-e_o}{R} \qquad \Rightarrow \qquad I(s)=\frac{E_i(s)-E_o(s)}{R}$$

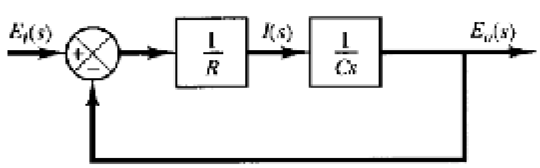
$$e_o=\frac{\int i\,dt}{C} \qquad\qquad E_o(s)=\frac{I(s)}{Cs}$$

دو معادله فوق را می توان بصورت دو دیاگرام زیر نمایش داد:

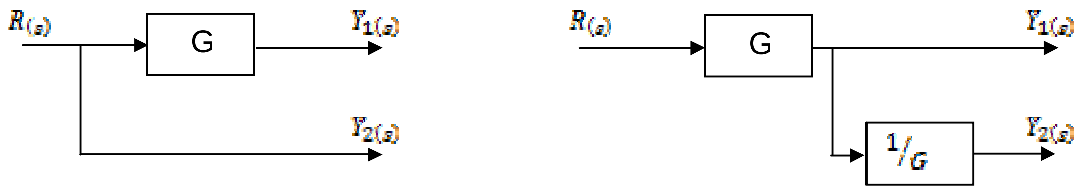




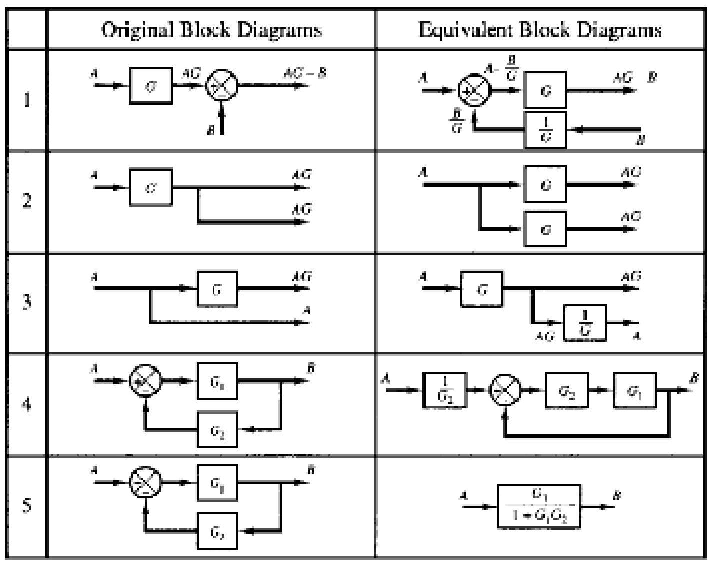
و در نهایت با کنار هم قرار دادن دو دیاگرام فوق خواهیم داشت:



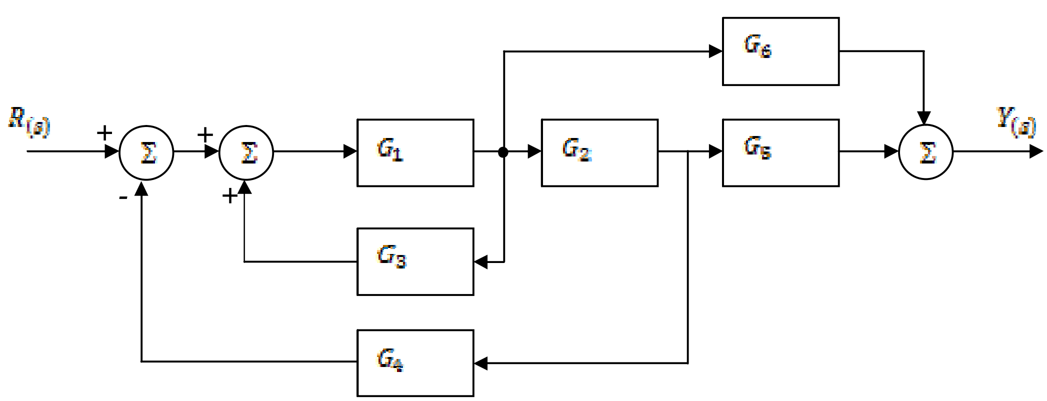
- **انتقال گره :**



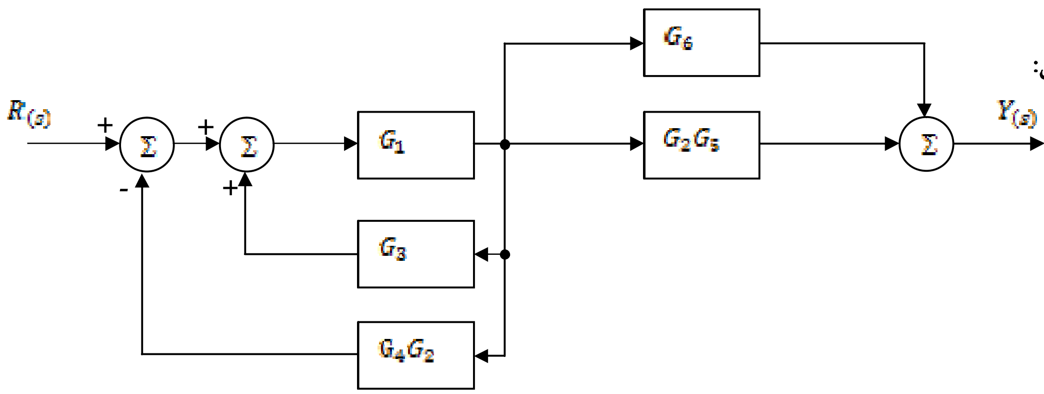
جدول زیر چند عمل پرکاربرد در ساده سازی را بطور خلاصه نمایش می دهد:

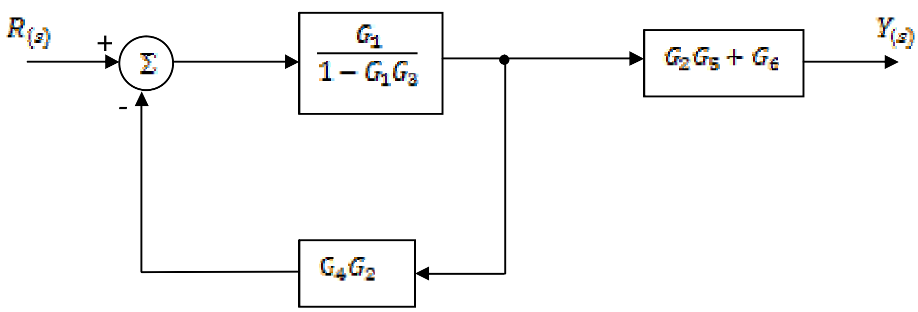


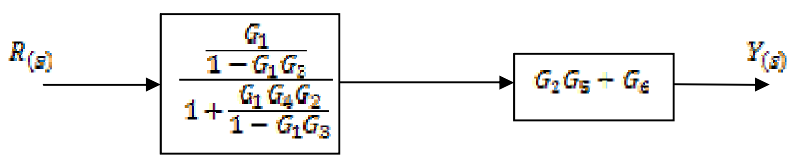
مثال(۱۴-۲): تابع تبدیل شکل زیر کدام است ؟

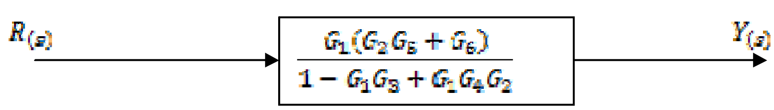


حل:



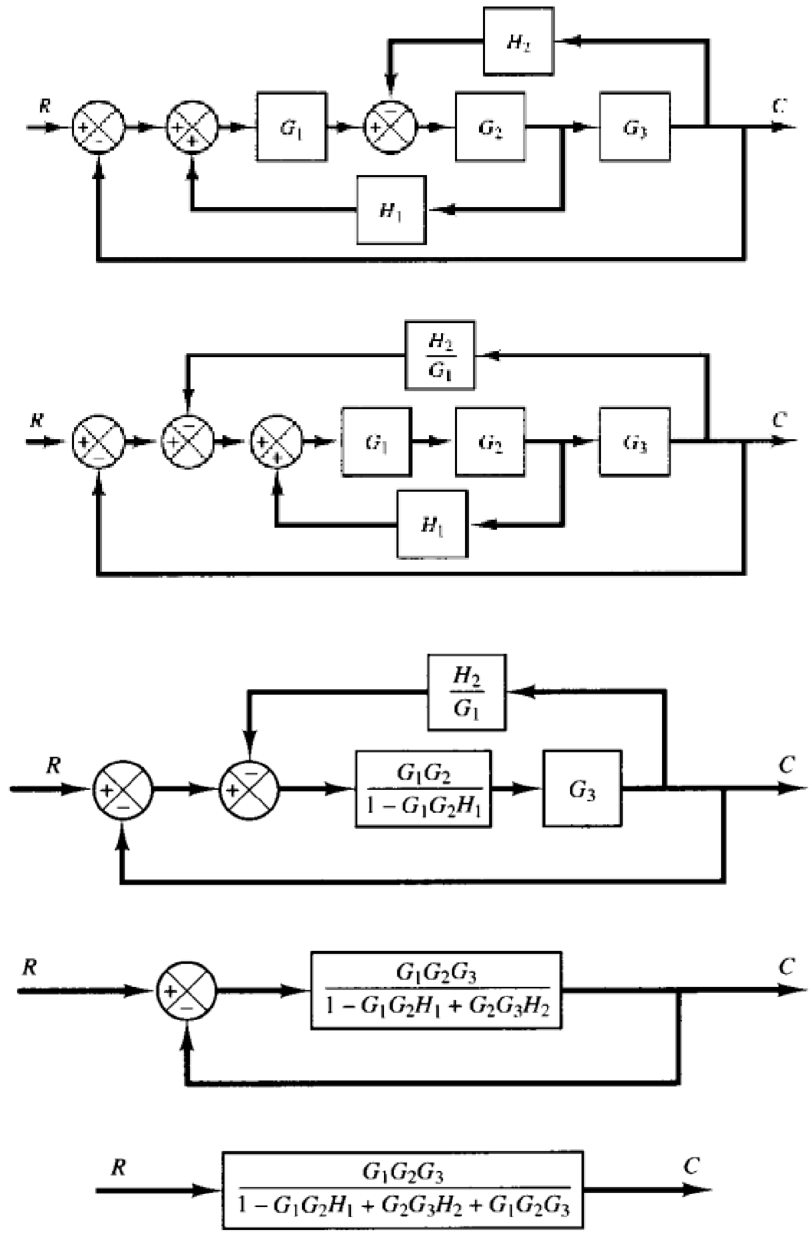




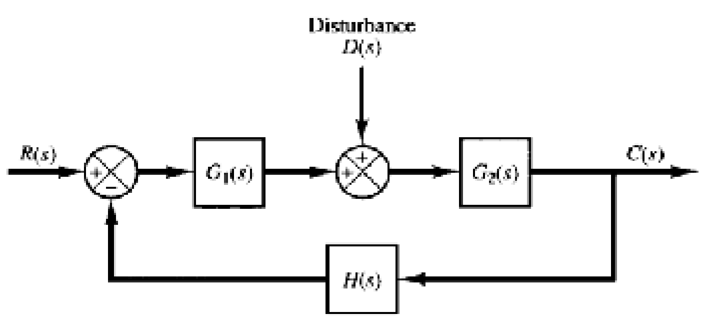


$$T(S)=\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{G_1(G_2G_5+G_6)}{1-G_1G_3+G_1G_4G_2}$$

مثال(۱۵-۲) دیاگرام بلوکی زیر را ساده کنید:



مثال(۱۶-۲) در سیستم زیر تابع تبدیل خروجی نسبت به ورودی و اغتشاش را بدست آورید و سپس خروجی را تعیین کنید.



ملاحظه می شود که سیستم دارای یک خروجی و دو ورودی مرجع $R(S)$ و اغتشاش $D(S)$ است. می دانیم که تابع تبدیل همواره نسبت یک خروجی به یک ورودی است. بنابراین در سیستمهای $MIMO$ باید خروجیهای اضافی را غیر فعال کرد و ورودیهای اضافی را صفر کرد تا تابع تبدیل خروجی به ورودی مورد نظر بدست آید.

در سیستم فوق تابع تبدیل خروجی نسبت به هر یک از ورودیها بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

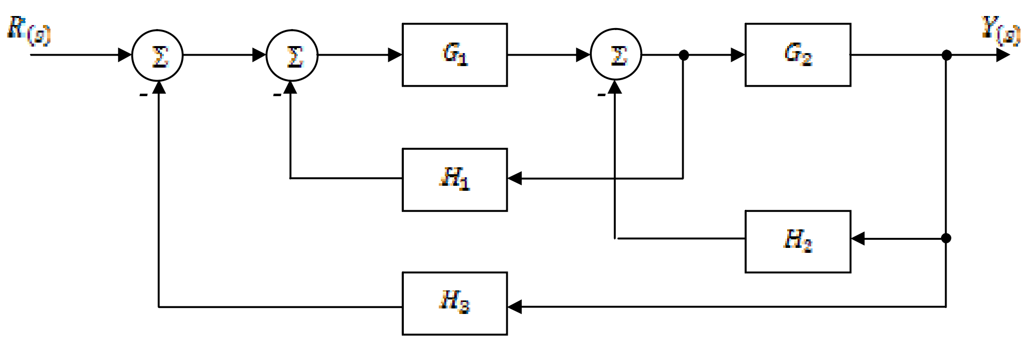
$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

با توجه به اینکه سیستم مورد نظر خطی است پس خروجی از ترکیب دو ورودی بدست می آید:

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + D(s)]$$

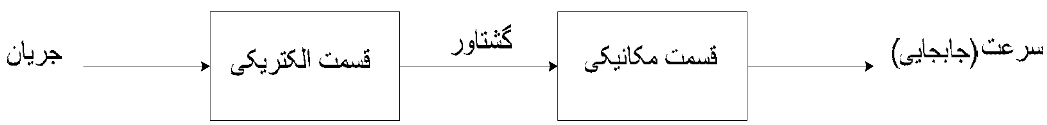
در رابطه بالا دیده می شود که اگر $|G_1(S).H(S)| \gg 1$ باشد آنگاه $|G_1(S).H(S).G_2(S)| \gg 1$ است و اثر اغتشاش به سمت صفر میل می کند. این یکی از مزایای فیدبک است که در سیستمهای حلقه بسته ظاهر می شود.

تمرین (۴-۲): نمودار بلوکی شکل زیر را ساده کرده و تابع تبدیل معادل آنرا بدست آورید.



فرآیندهای الکترومکانیکی:

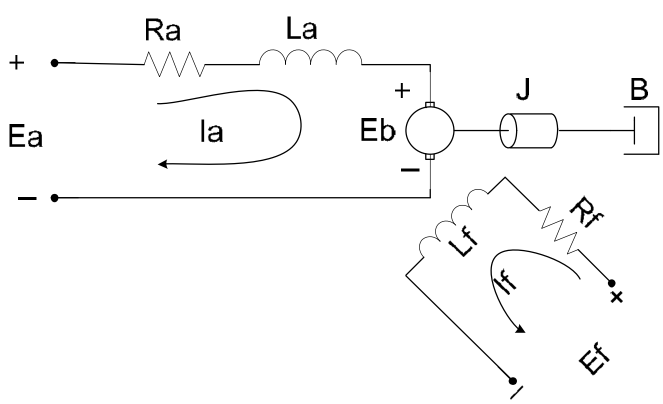
فرآیندهای الکترومکانیکی ترکیبی از دو فرآیند الکتریکی و مکانیکی است. در این پروسه ها ابتدا در بخش الکتریکی، جریان یا ولتاژ تبدیل به گشتاور شده و سپس در بخش مکانیکی گشتاور تبدیل به جابجائی یا سرعت خواهد شد. شکل زیر بخشهای یک سیستم الکترومکانیکی را نشان می دهد.



بدلیل اینکه بیشتر کنترل کننده ها الکتریکی و بیشتر سیستمهائی که با آنها سروکار داریم مکانیکی هستند، یک عملگر الکترومکانیکی مانند موتور *DC* ضروری است. بعضی از دلائل استفاده موتور *DC* بعنوان عملگر عبارتند از: قابلیت حمل و نقل آسان، سادگی کنترل سرعت و مشخصه گشتاور - سرعت مناسب.

اکنون به بررسی موتور *DC* و بدست آوردن تابع تبدیل آن و همچنین مقایسه روشهای کنترل آن خواهیم پرداخت:

موتور *DC* : موتور *DC* را در دو حالت مورد بررسی قرار می دهیم. یکی در حالتی که میدان ثابت است و عمل کنترل توسط ولتاژ آرمیچر صورت می گیرد و دیگری زمانی که ولتاژ آرمیچر ثابت است و کنترل توسط میدان انجام می گردد.



$\varphi =$

با توجه به اینکه گشتاور تولیدی موتور هم به جریان آرمیچر و هم به جریان تحریک بستگی دارد، تابع تبدیل موتور را در دو حالت بدست می آوریم:

الف) میدان ثابت است (کنترل توسط آرمیچر انجام می شود):

$I_f =$ ثابت $\Rightarrow \varphi =$ ثابت

گشتاور تولیدی توسط موتور $\Longrightarrow \quad T_e = K.I_a$

1) $E_b = K_2.\varphi.\frac{d\omega}{dt} = K_b.\frac{d\omega}{dt}$

2) $E_a = R_a I_a + L_a.\frac{dI_a}{dt} + E_b$

گشتاور مکانیکی مصرفی $\Longrightarrow \quad T_m = J.\frac{d^2\theta(t)}{d^2t} + B.\frac{d\theta(t)}{dt} = J.\frac{d\omega(t)}{dt} + B.\omega(t)$

در حالت تعادل : گشتاور مصرفی توسط بار = گشتاور تولیدی توسط موتور

3) $T_e = T_m \Rightarrow J.\frac{d^2\theta(t)}{d^2t} + B.\frac{d\theta(t)}{dt} = K.I_a$

معادلات (۱)،(۲)و(۳)را به حوزه لاپلاس می بریم وتابع تبدیل را بدست می آوریم :

$$\frac{\theta(s)}{E_a(S)} = \frac{K}{S[(Ra+SLa)(JS+B)]+K.Kb}$$

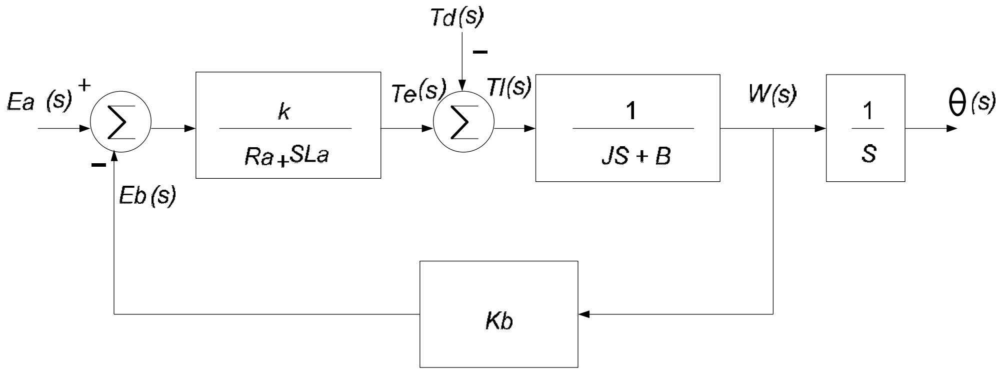
با فرض $L_a = 0$ داریم :

$$\frac{\theta(s)}{E_a(S)} = \frac{Km}{S(\tau m.S+1)}$$

که در آن :

ثابت زمانی موتور $\tau m = \frac{Ra.J}{Ra.B+K.Kb}$, ثابت بهره موتور $Km = \frac{K}{Ra.B+K.Kb}$

دیده می شود که در حالتی که موتور *dc* توسط جریان آرمیچر کنترل می شود تابع تبدیل موتور با یک سیستم مرتبه دوم معادل است. همچنین با توجه به دیاگرام بلوکی زیر دیده می شود که در این حالت سیستم دارای یک فیدبک داخلی است که باعث می شود عملکرد موتور در کنترل سرعت بهتر باشد. البته چون سیستم مرتبه دوم است در کنترل آن احتمال نوسانی شدن و یا ناپایدار شدن سیستم وجود دارد. از سوی دیگر به واسطه زیاد بودن جریان آرمیچر معمولا تجهیزات مربوط به درایو موتور در این نوع کنترل گرانتر خواهد بود.



ب) جریان آرمیچر ثابت است (کنترل توسط میدان انجام شود): (I_a=const)

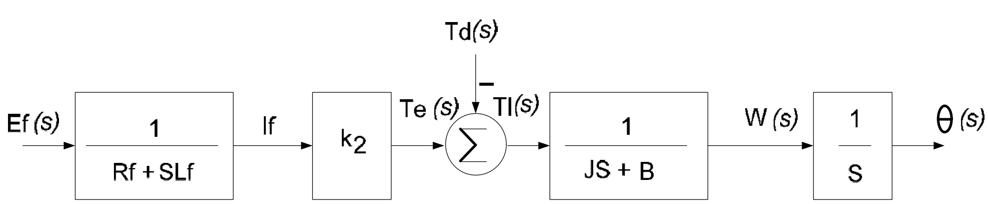
$T=K_2.I_f$, $E_f=R_f.I_f+L_f.\frac{dIf}{dt}$, $J.\frac{d2\theta}{dt2}+B.\frac{d\theta}{dt}=K_2.I_f=T$

$(L_f.S+R_f).I_f(S)=E_f(S)$, $(JS^2+BS).\theta(s)=K_2.I_f(S)$

$$\Longrightarrow \frac{\theta(s)}{Ef(S)}=\frac{K2}{S[(Rf+SLf)(JS+B)]}=\frac{Km}{S(\tau m.S+1)(\tau f.S+1)}$$

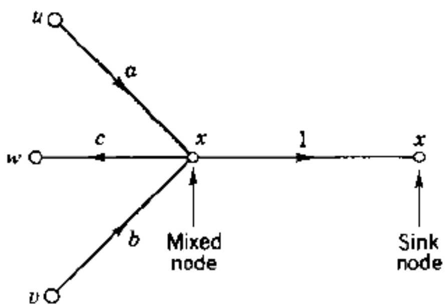
$K_m=\frac{K2}{Rf.B}$ ثابت بهره موتور

$T_m=\frac{J}{B}$ ثابت زمانی بار , $T_f=\frac{Lf}{Rf}$ ثابت زمانی میدان



نکته : پایداری کنترل دور موتور بوسیله جریان آرمیچر از جریان میدان بیشتر است .

نمودار گذر سیگنال :



تعاریف :

گره : نقطه ای است که یک متغیر یا یک سیگنال را نشان می دهد

انواع گره عبارتند از: گره ورودی یا $Source$، گره خروجی یا $Sink$ و گره مخلوط یا $Mixed$.

گره ها دو کار را انجام می دهند. اولا تمام سیگنالهائی که به آنها وارد می شود را با هم جمع می کنند و ثانیا حاصل جمع را به تمام شاخه های خروجی ارسال می کند. در شکل بالا داریم:

$x = au + bv$ و $w = cx = cau + cav$

شاخه : خطی است که دو گره را به هم وصل می کند .

بهره : بهره حقیقی یا مختلط بین دو گره .

مسیر : راهی است که یک جریان در جهت شاخه های به هم متصل شده طی می کند .

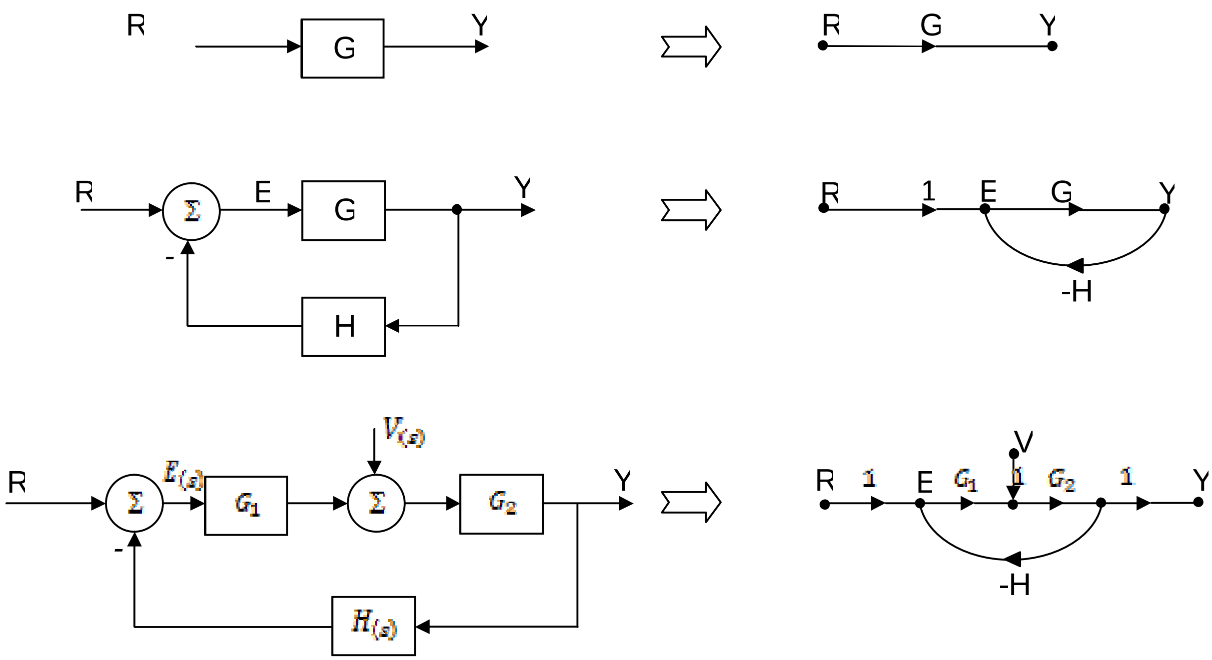
حلقه : یک مسیر بسته را حلقه گویند .

بهره حلقه : حاصل ضرب بهره های شاخه های یک حلقه .

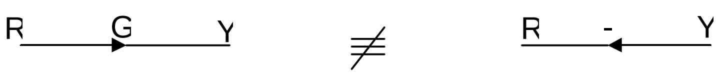
مسیر پیشرو : مسیری است که از گره ورودی به سمت گره خروجی حرکت کند به شرطی که از هرگره فقط یک بار عبور کند .

بهره مسیر پیشرو : حاصل ضرب بهره های مسیر پیشرو می باشد .

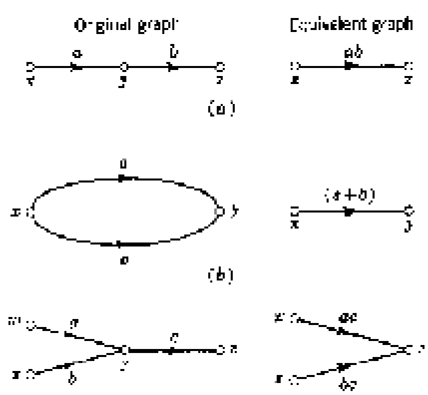
مثال(۱۷-۲): نمودار گذر سیگنال شکلهای زیر را رسم نمایید .

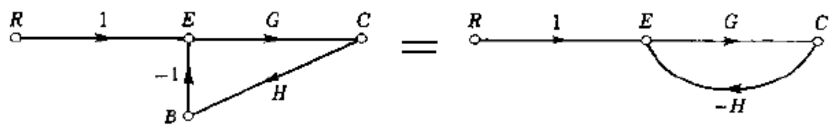


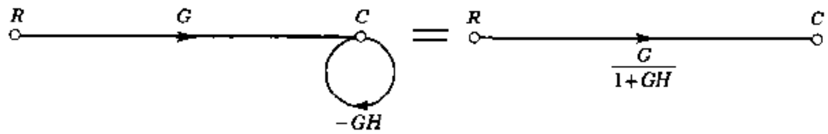
تذکر :



در شکل زیر چند معادل در ساده سازی نمودار گذر سیگنال دیده می شود:







قاعده میسون : اگر یک سیستم را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش دهیم می توانیم تابع تبدیل معادل آنرا با استفاده از فرمول بهره میسون که بصورت زیر تعریف می شود بدست آورد.

$$G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i} P_i * \Delta_i$$

i: تعداد مسیرهای پیشرو

p_i: بهره مسیر پیشرو i ام

Δ: دترمینان سیستم که به صورت زیر محاسبه می شود :

Δ=1-(مجموع بهره کلیه حلقه های تکی)+

(مجموع حاصل ضرب بهره های هر دو حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)-

(مجموع حاصل ضرب بهره های هر سه حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)+

(مجموع حاصل ضرب بهره های هر چهارحلقه ای که با هم گره مشترک ندارند)-.........

Δ_i: دترمینان مسیر پیشرو i ام که به صورت زیر محاسبه می شود :

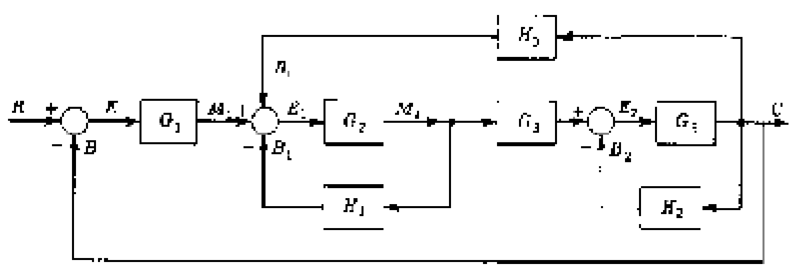
$\Delta_i=1-$(مجموع بهره کلیه تک حلقه هایی که با مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)+

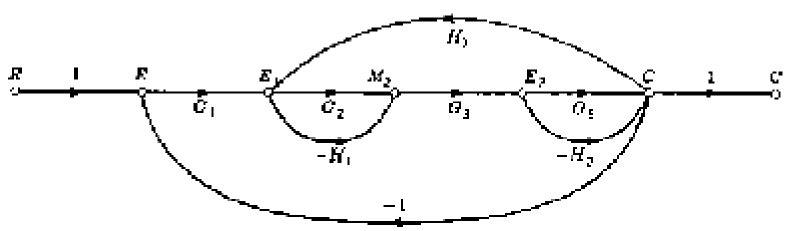
– (مجموع حاصل ضرب بهره های دوحلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)

+(مجموع حاصل ضرب بهره های سه حلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)

-(مجموع حاصل ضرب بهره های چهارحلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)........

مثال(۱۸-۲) دیاگرام بلوکی شکل زیر را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش داده و سپس با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل کلی سیستم را بدست آورید:





تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1G_2G_3G_5$$

- حلقه های تکی :

$$L_1 = -G_2H_1 \quad , \quad L_2 = -G_5H_2 \quad , \quad L_3 = -G_2G_3G_5H_3 \quad , \quad L_4 = -G_1G_2G_3G_5$$

- حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_2)$$

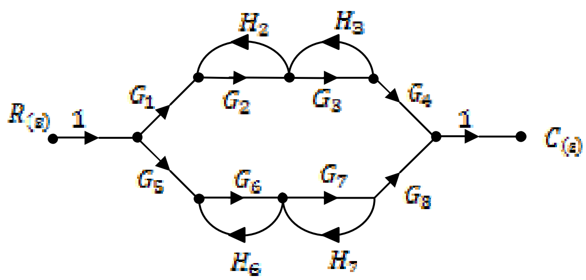
- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_2)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_5}{(-G_2H_1 - G_5H_2 - G_2G_3G_5H_3 - G_2G_3G_5 + G_2H_1G_5H_2)}$$

مثال(۱۹-۲): تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید .



حل :

- تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1G_2G_3G_4 \quad , \qquad P_2 = G_5G_6G_7G_8$$

- حلقه های تکی :

$$L_1 = G_2H_2 \quad , \quad L_2 = G_3H_3 \quad , \quad L_3 = G_6H_6 \quad , \quad L_4 = G_7H_7$$

- حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_3) \ , \ (L_1, L_4) \ , \ (L_2, L_3) \ , \ (L_2, L_4)$$

- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_3 + L_1, L_4 + L_2, L_3 + L_2, L_4)$$

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_1, L_3 = 0} = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_3, L_4 = 0} = 1 - (L_1 + L_2)$$

- **نکته :** دترمینان یک سیستم (Δ) بستگی به ساختارداخلی آن سیستم دارد و هیچ گونه ارتباطی با محل انتخاب ورودی ها و خروجی ها ندارد به طور کلی $\Delta = 0$ که مخرج تابع تبدیل است معادله ای را تشکیل می دهد به نام معادله مشخصه که ریشه های آن برای ما ساختار سیستم را مشخص می کند ، این ریشه ها که قطب های سیستم نامیده می شوند فرم کلی پاسخ را ارائه می دهند .
- **تمرین(۶-۲):** نمودار گذر سیگنال شکل زیر را رسم نموده و با استفاده از قائده میسون آن را ساده نمایید :