بسم الله الرحمن الرحیم

درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

دکتر منصور زینلی

فصل اول

سیگنال: نشانه یا علامت هر کمیت فیزیکی(قابل اندازه گیری) است.

انواع سیگنال :

۱ –سیگنالپیوستهدرزمانکهبهصورت x(t) نشان داده میشود و t یک متغیر مستقل و یک عدد طبیعی است .

مثال) $x(t) = \sin t$

۲ –سیگنالگسستهبهصورت x [n] نشان داده می شود و n یک عدد صحیح است .

$n = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots$

سیگنال های انرژی و توان

مثال) برای مقاومت داریم $\rightarrow \quad P = R.i^2 = \frac{v^2}{R}$

$E = \int P(t)\, dt = \int R.i^2\, dt = \int \frac{v^2}{R}\, dt$

انرژی یک سیگنال در فاصله ی زمانی $[T_1 , T_2]$ به صورت زیر است:

$$E = \int_{T_2}^{T_1} | x(t)|^2\, dt$$

$x(t) = A + jB = |x(t)|\, e^{j\sphericalangle x(t)}$

$|x(t)| = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\quad\quad$ $\measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{A}{B}$

$Ae^{j\varphi(t)} = A\cos\varphi(t) + jA\sin\varphi(t)$

مثال) $x(t) = \cos t + j\sin 2t$

$|x(t)| = \sqrt{cos^2 t + sin^2 2t}$

$\measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{\sin 2t}{\cos t}$

$x^*(t) = A - jB = |x(t)|\, e^{-j\measuredangle x(t)}$

$x(t) . x(t)^* = A^2 + B^2 = |x(t)|^2$

مثال : انرژی کل سیگنال های زیر را به دست آورید

۱) $x(t) = 3e^{2jt}$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} 9\, dt = 9t\, |_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$

۲) $x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t\geq 0 \\ e^{2t} & t<0 \end{cases}$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{0} e^{4t} + \int_{0}^{+\infty} e^{-6t} = \frac{1}{4}e^{4t}|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{6}e^{-6t}|_{0}^{+\infty} = \frac{10}{24}$

انرژی کل یک سیگنال گسسته چنین تعریف می شود

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

مثال) $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

$$E_\infty = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

فرمول های مهم :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \propto^n = \frac{1}{1-\propto} \quad , \quad |\propto| < 1$$

$$2) \sum_{n=0}^{N} \propto^n = \frac{1-\propto^{N+1}}{1-\propto}$$

$$1) \sum_{n=N_1}^{N_2} \propto^n = \frac{\propto^{N_1} - \propto^{N_2+1}}{1-\propto}$$

مثال)

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & 5 \leq n \leq 13 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E_\infty = \frac{(\frac{1}{9})^5 - (\frac{1}{9})^{14}}{1-\frac{1}{9}}$$

اگر انرژی یک سیگنال محدود شود به آن سیگنال انرژی میگویند

توان یک سیگنال در بازه ی زمانی $[T_1 , T_2]$ چنین است :

$$P = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{N_2 - N_2 + 1} + \sum_{n=N}^{N_2} |x[n]|^2$$

توان متوسط یک سیگنال به صورت زیر است :

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P_\infty = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

مثال) توان متوسط سیگنال های زیر را به دست آورید:

1) x(t)= t

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} T^2 \, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{t^3}{3} \Big|_{-T}^{T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{2T^3}{3} = +\infty$$

2) x(t) = e^{-3t}

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-6t} \, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{-1}{12T} [e^{-6T} - e^{6T}] = \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{6T}}{12T} = +\infty$$

$$3)\ \ x(t)=\begin{cases} e^{-3t} & t\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$P_\infty=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T e^{-6t}\,dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{12T}(1-e^{-6t})=0$$

$$P_\infty=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}4=\lim_{N\to+\infty}\frac{4(N+1)}{2N+1}=2$$

سیگنال های متناوب

$x\ (t)$ یک سیگنال پیوسته ی متناوب با دوره تناوب T_0 است اگر :

$x\ (t)= x\ (t+T_0)$, for All t

اگر T_0 کوچکترین عددی باشد که رابطه ی فوق برای آن برقرار است T_0 را دوره ی تناوب اصلی می نامند

مثال) $x\ (t) = \cos t\ ,\ T_0=\pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

مثال) $x\ (t) = \cos \omega_0 t\ \ , T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$

مثال) $x\ (t) = cos^2\omega_0 t = 1+\cos 2\omega_0 t \qquad T_0=\frac{\pi}{\omega_0}$

مثال) $x\ (t) = \cos t+\cos\frac{2t}{3}+\sin\frac{t}{5}$

$T_1=2\pi$, $T_2=3\pi$, $T_3= 10\pi$

که T کل از ک.م.م T ها به دست می آید $\qquad T_0=30\pi$

مثال) $x\ (t) =\cos t \cdot \cos 2t$

$x(t) = \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos t$

$T_1 = \frac{2\pi}{3}$, $T_2 = 2\pi$ $T_0 = 2\pi$

x[n] یک سیگنال متناوب است اگر

$x[n] = x[n+N_0]$ for All n

مثال) $x[n]= \cos\frac{n}{3}$

$N_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

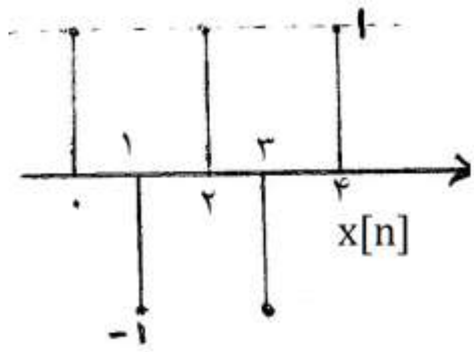
$x[n] = \cos[\pi n^2]$

$x[n]= x[n+N_0] \rightarrow \cos\pi(n+N_0)^2$

$\rightarrow \cos\pi\, n^2 = \cos(\pi n^2 + 2nN_0\pi + \pi N_0^2 = \cos(\pi n^2 + \pi N_0^2)$

_ $\cos(\boldsymbol{\theta}) = \cos(\boldsymbol{\theta}+2k\pi)$ $\pi N_0^2 = 2k$, k=±1 , ±2,…

$N_0 = 2$

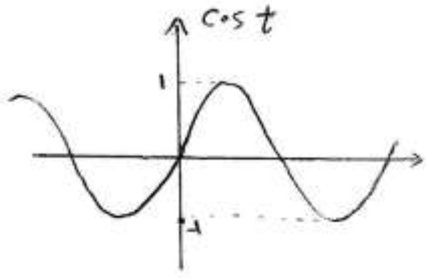


سیگنال های زوج (even) و فرد (odd)

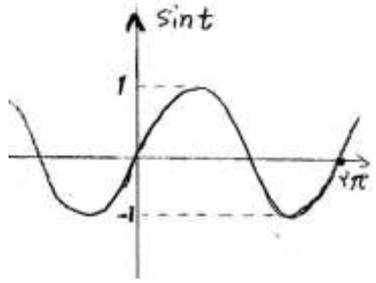
یک سیگنال زوج است اگر :

x (t) = x(-t)

x [t] = x [-n]



و فرد است اگر:



x (t) =- x(-t)

x (-t) = -x(t)

x[n]= -x[-n]

قسمت های زوج و فرد یک سیگنال چنین تعریف میشود :

$$x_e(t) = Ev\{x(t)\} = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$$x_o = Odd\{x(t)\} = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

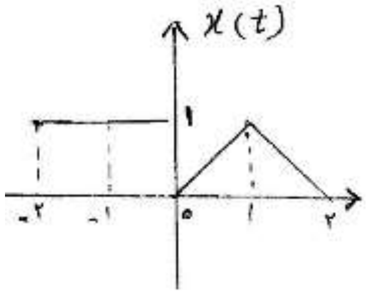
مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

1) $x(t) = \ e^{j\omega_0 t}$

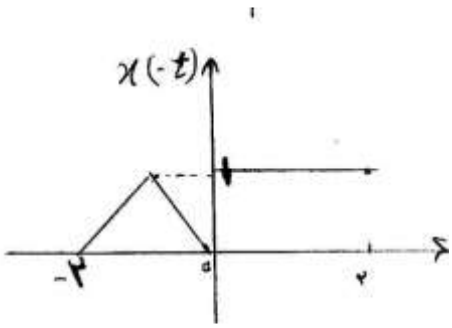
$$x_e(t) = \frac{e^{jt\omega_0} + e^{-jt\omega_0}}{2} = \cos t\omega_0$$

$$x_o(t) = \ \frac{e^{jt\omega_0} - e^{-jt\omega_0}}{2} = j\sin t\omega_0$$

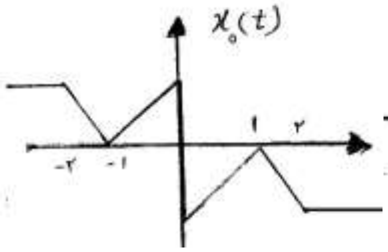
2)

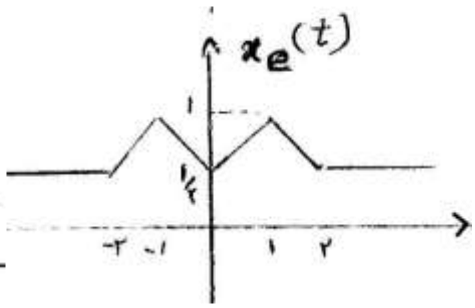


$\longrightarrow$



$\longrightarrow$



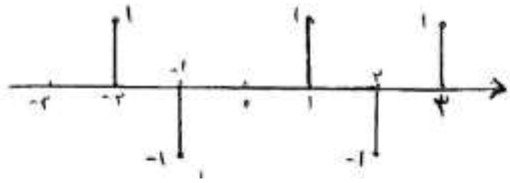


3)$x\,(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ t & -1 < t < 0 \\ -t + 2 & 2 < t < -1 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$

$$x(-t)=\begin{cases} 1 & t<0 \\ -t & -1<t<0 \\ -t+2 & 0<t<1 \\ 0 & t<-2 \end{cases}$$

$$x_e(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & t<-2 \\ \frac{t+3}{2} & -2<t<-1 \\ \frac{1-t}{2} & -1<t<0 \end{cases}$$

مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:



n[x]

$$x_e[-3]=\frac{x[-3]+x[3]}{2}=\frac{1}{2}=x_e[3]$$

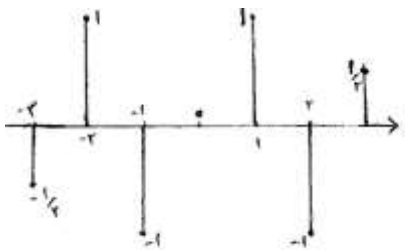
$x_e[-2]=0=x_e[2]$

$x_e[-1]=0=x_e[1]$

$x_e[0]=0$ $x_e[n]$

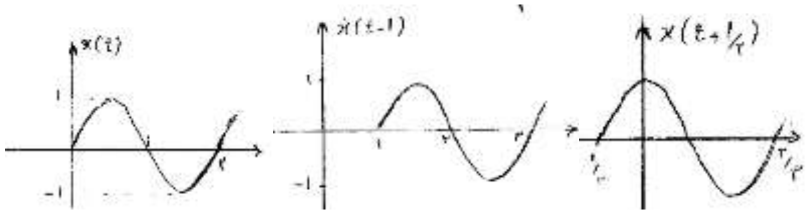
$x_o[-3]=\frac{1}{2}x_o[-2]=1$

$x_o[-1]=-1x_o[0]=0x_o[n]$



تبدیل های متغیر مستقل:

سیگنال $x(t-t_0)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ در حوضه ی زمان به اندازه ی $t_0 > 0$ ایجاد میشود اگر $t_0 > 0$ شیفت به راست و اگر $t_0 < 0$ به چپ شیفت پیدا می کند که داریم:

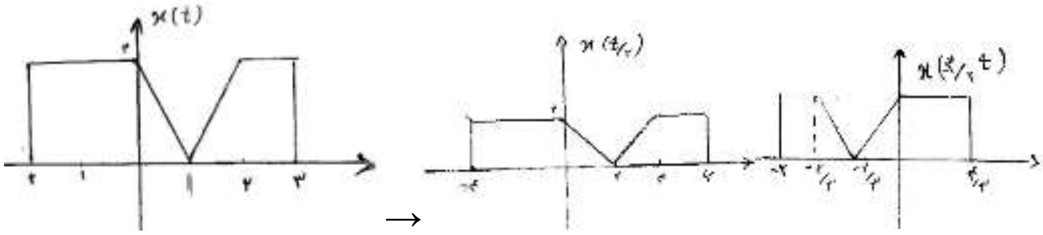


سیگنال $x(\propto t)$ از تغییر مقیاس $x(t)$ در حوضه ی زمان به اندازه ی $\frac{1}{\propto}$ ایجاد میشود.

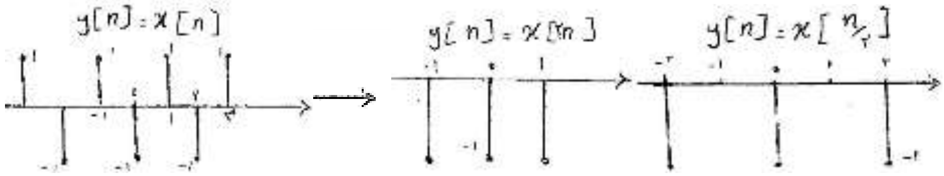
اگر $|\propto| > 1$ باشد سیگنال فشرده و در غیر این صورت باز می شود

مثال)

۱)

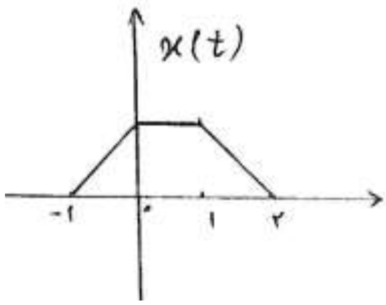
if 

۲)

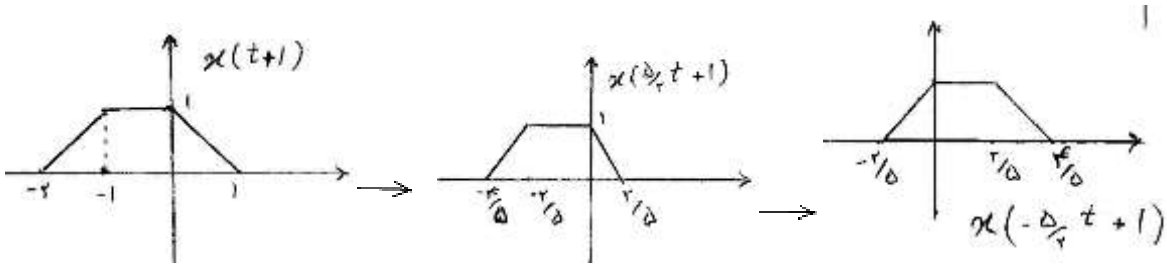
if 

-سیگنال $x(\alpha t + \beta)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ به اندازه ی $-\beta$ و تغییر مقیاس عرضی β وتغییر افقی مقیاس سیگنال به اندازه ی $\frac{1}{\alpha}$ حاصل میشود.

مثال) اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد مطلوب است: $x(-\frac{5}{2}t + 1)$



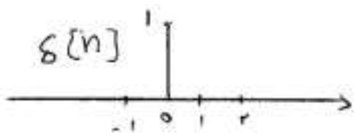
حل)



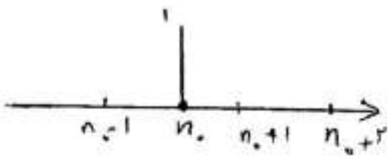
سیگنال های پله ی واحد و ضربه و پله گسسته

یک سیگنال ضربه ی واحد گسسته این چنین تعریف می شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



مثال) $\delta[n-n_0]$

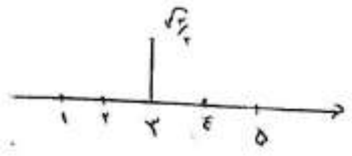


خاصیت غربالی سیگنال ضربه:

$$x[n].\delta[n-n_0]=x[n_0].\delta[n-n_0]=\begin{cases}x[n_0] & n=n_0\\ \\ 0 & n\neq n_0\end{cases}$$

مثال)

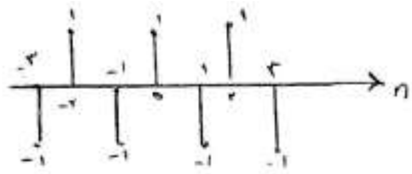
$$\cos\frac{n^2\pi}{4}\delta[n-3]=\cos\frac{9\pi}{4}\delta[n-3]=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[n-3]$$



مثال)

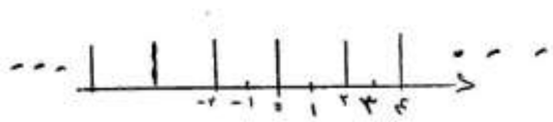
$$x[n]=\sum_{k-3}^{3}(-1)^k\delta[n-k]=(-1)\delta[n+3]+\delta[n+2]+(-1)\delta[n+1]+\delta[n]+$$

$$+(-1)\delta[n-1]+\delta[n-2]+(-1)\delta[n-3]$$



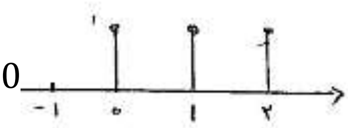
مثال)

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]=\cdots+\delta[n+4]+\delta[n+2]+\delta[n]+\cdots$$



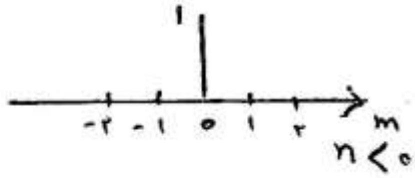
سیگنال پله ی واحد گسسته چنین تعریف می شود:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



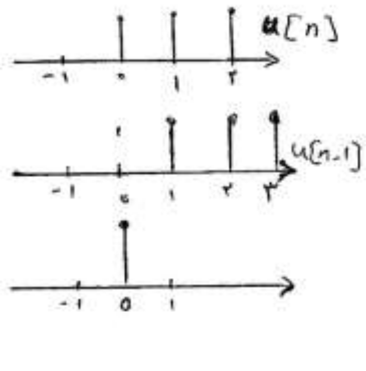
بر حسب ضربه :

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=-\infty} \delta[m] \qquad (m = n - k)$$



تابع ضربه ی پله :

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



تمرین : سیگنال های زیر را رسم کنید .

1) $x[n] = u[n+3] - u[n-3]$

2) $x[n] = u[3-n] - u[n+4]$

3) $x[n] = \cos \pi n^2 \sum_{k=-6}^{4} \delta[n-k]$

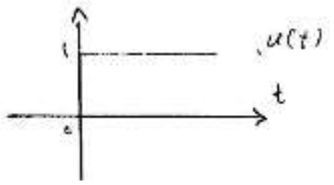
4) $x[n] = u[n+10]\, u[10-n]$

$$5)\ x[n] = \sum_{k=-3}^{3} (-1)^k u[n-k]$$

سیگنال های پله و ضربه ی واحد

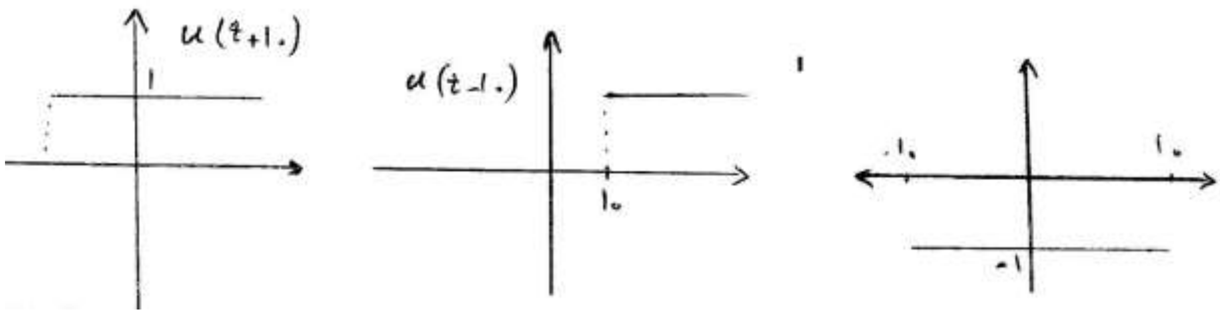
سیگنال واحد پله و ضربه ی واحد چنین تعریف میشود:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

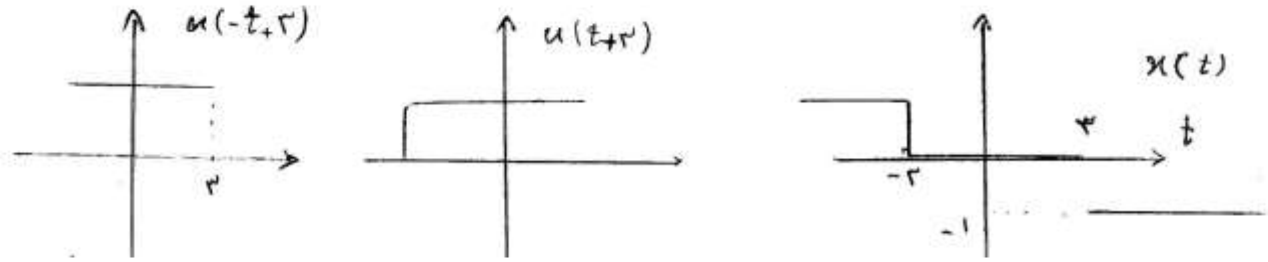


مثال) سیگنال های زیر را رسم کنید :

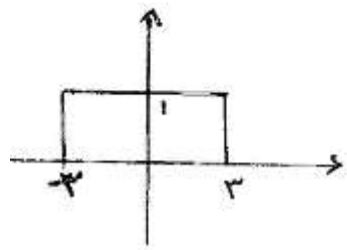
$$1)\ x(t) = u(t-10) - u(t+10)$$



$$2)\ x(t) = u(-t+3) - u(t+3)$$

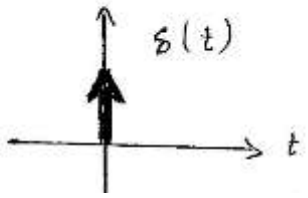


3) $x(t) = u(t-3).u(t+3)$



سیگنال ضربه ی واحد پیوسته

این سیگنال چنین تعریف میشود:



$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

روابط بین تابع ضربه و تابع پله به این شکل است:

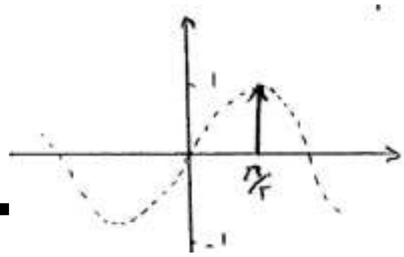
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')dt' \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

خاصیت غربالی سیگنال ضربه

$$x(t) \times \delta(t-t_0) = x(t_0) \times \delta(t-t_0)$$

مثال)

1) $\sin t \,.\, \delta(t) = 0 \,.\, \delta(t) = 0$



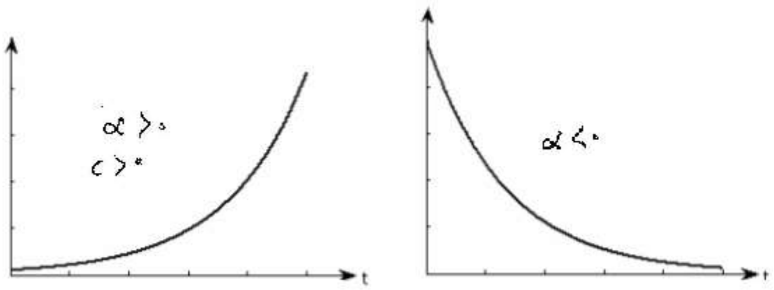
$$2)\ \sin t\ .\ \delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

سیگنال های نمایی پیوسته

یک سیگنال نمایی پیوسته به یکی از سه حالت زیر میباشد:

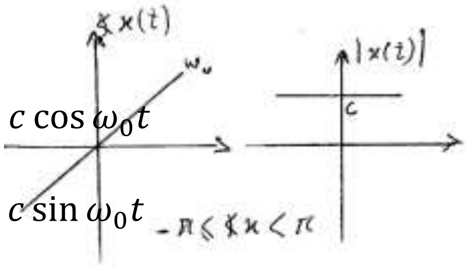
$1)x(t)=ce^{\alpha t}$

دوعدد حقیقی اند c,α



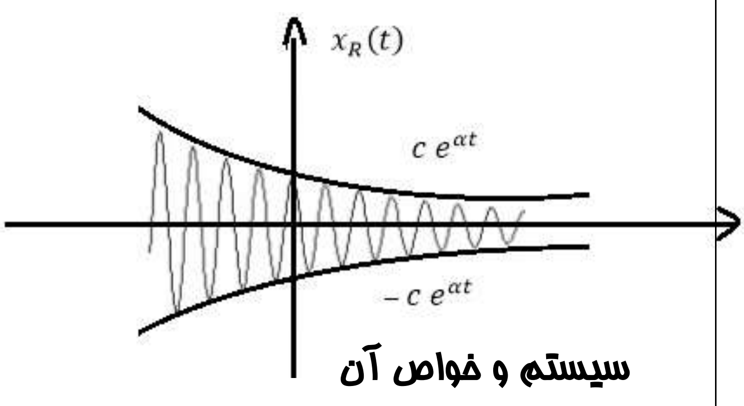
$2)x(t)=ce^{j\omega_0 t}$

$$\begin{cases} |x(t)|=c \\ \sphericalangle\, x(t)=\omega_0 t \end{cases} \begin{cases} x_R(t)=c\cos\omega_0 t \\ x_I(t)=c\sin\omega_0 t \end{cases}$$



$3)x(t)=ce^{\alpha T}e^{j\omega_0 t}$

$$\begin{cases} |x(t)|=c \\ \sphericalangle\, x(t)=\omega_0 t \end{cases} \begin{cases} x_R(t)=c\ e^{\alpha t}\cos\omega_0 t \\ x_I(t)=c\ e^{\alpha t}\sin\omega_0 t \end{cases}$$



سیستم و خواص آن

یک سیستم فرآیندی است که یک یا چند ورودی را به یک یا چند خروجی تبدیل میکند

$$y(t)=T\{x(t)\}$$

خواص سیستم ها:

۱) حافظه دار بودن: سیستم بودن حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به مقدار خروجی وابسته باشد (به گذشته وابسته نباشد)

سلف و خازن جزء سیستم های حافظه دارند ولی مقاوت یک سیستم بدون حافظه است

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases}$$ مقاومت

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \\ y(t) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \end{cases}$$ خازن

$$\begin{cases} v(t) = l\dfrac{di(t)}{dt} \\ y(t) = l\dfrac{du(t)}{dt} = l\lim\limits_{\Delta\to 0}\dfrac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta} \end{cases}$$ سلف

مثال یک سیستم حافظه دار:

$$y[n] = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}[n-k] = \frac{1}{m+1}(x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-m])$$

*اگر داخل پرانتز ها ویا کروشه ها عملیات ریاضی انجام شده باشد سیستم حافظه دار است .

۲) علّی بودن: سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ی ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد (در واقعیت هیچ سیستمی به آینده وابسته نیست)

کلیه ی سیستم های بدون حافظه علی اند

مثال برای سیستم غیر علی:

$$y[n] = \frac{1}{2m+1}\sum^{m} x[n-k] = \frac{1}{2m+1}(x[n+m] + \cdots)$$

۳) وارون پذیری : سیستمی که بتوان از خروجی آن ورودی را به طور یکتا تعیین کرد.

مثال)

$$1)\ y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(t')d' \overset{\text{وارون}}{\Longrightarrow} x(t') = c\frac{dy(t)}{dt}$$

$2)\ y(t) = l\dfrac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} y(t')dt'$ وارون پذیر

$x(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} y(t')dt' + C$ وارون پذیر نیست

$3) y[n] = x^2[n] \to x[n] = \pm\sqrt{y[n]}$

مثال نقض :

$x_1[n] = 1 \ \to\ y_1[n] = 1$

$x_2[n] = -1 \ \to\ y_2[n] = 1$

$4)\ y(t) = \sin x(t)$

$x(t) = sin^{-1}y(t) + 2k\pi \qquad y(t) = 0 \to x(t) = 0 \pm \pi\ , \pm 2\pi$

۴) پایدار بودن: سیستمی پایدار است که از ورودی ها با دامنه ی محدود ، خروجی با دامنه ی محدود تولید کند .

$$|x(t)| < B_x \to |y(t)| < B_y$$

B_x و B_y دو عدد محدود

مثال)

$1) y(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$

مثال نقض $x(t) = 1 \to y(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} dt' \to +\infty$

$2)\ y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ مثال نقض $x(t) = u(t) \to y(t) = \delta(t)$

۵) تغییر پذیری با زمان: سیستمی است که به ازای ورودی های یکسان در زمان های مختلف خروجی های یکسان در زمان های مختلف تولید کند.

$x(t) \to y(t)$

$x_2(t) = x(t - t_0 \to y_2(t) = y(t - t_0)$

مثال) تغییر پذیری یا نا پذیری سیستم های زیر را بررسی کنید .

$$1)\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$$

$$x_2(t) = x(t-t_0) \to y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x_2(t'-t_0)dt'$$

$$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x(\,t"-t_0)dt" = y_2(t)$$

$$t" = t' + t_0$$

$$2)\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = x(t-t_0) y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx(t-t_0)}{dt}$$

$$y(t-t_0) = \frac{dx(t-t_0)}{dt} = y_2(t)$$

تمرین) تغییر پذیری یا ناپذیری سیستم زیر را بررسی کنید .

$$y(t) = x(2t)$$

۶) خطی بودن : یک سیستم خطی است اگر سیستم همگن و جمع پذیر باشد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$
$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$
$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$
$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

مثال) خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

1) $y[n] = n^2 x[n]$

$x_1[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_1[n]$

$$x_2[n] \rightarrow y_1 = n^2 x_2[n]$$

$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3 = n^2 x_3[n]$

خطی است

2) $y(t) = x^2(t)$

$x_1(t) = 1 \rightarrow y_1(t) = 1$

$x_2(t) = 3x_{\,1}(t) \rightarrow y_2(t) = 9$ همگن نیست

3) $y(t) = Re\{x(t)\}$ $x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$

$x_2(t) = j.x(t) \rightarrow y_2(t) = 0$ همگن نیست

تمرین) خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

$1) y(t) = x(t) + 1$

$2) y(t) = \log_{10} x(t)$

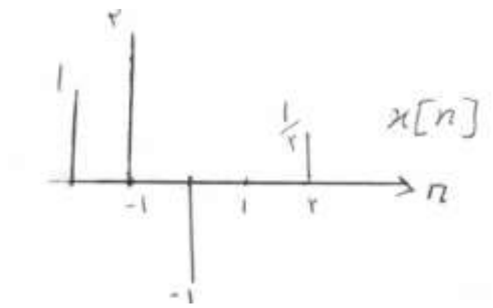
فصل دوم

سیستم های LTI

قضیه ی کانولوشن:

هر سیگنال گسسته را می توان برحسب مجموع توابع ضربه نوشت.

برای مثال سیگنال زیر رل در نظر بگیرید:



$$x[n] = \cdots + \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \cdots =$$

$$\ldots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

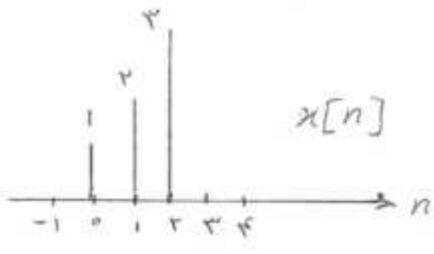
$$\delta[n-k] \xrightarrow{\text{خروجی}} h[n-k]$$

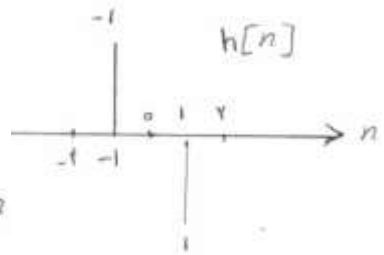
$$x[k]\,\delta[n-k] \xrightarrow{\text{خروجی}} x[k]\,h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\,h[n-k] = y[n]$$

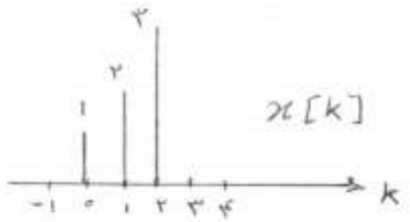
جمع کانولوشن $y[n] * h[n]$

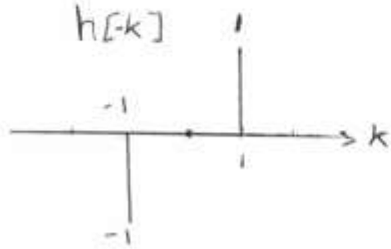
مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید:

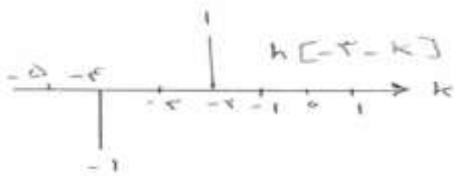




حل)



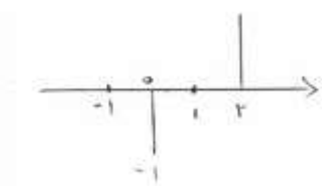




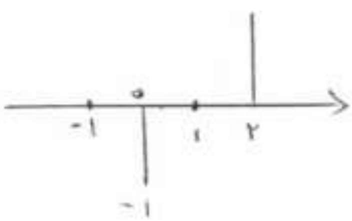
$$y[-3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-3-k] = 0$$

$h[-2-k]$

$y[-2] = 0$ $\qquad$ $h[-1] = 1$ $\qquad$ $y[0] = 1$



h[-k]



y[1-k] $\qquad$ y[1]=2

برای محاسبه ی کانولوشن میتوان مراحل زیر را طی نمود:

۱- x [k] و h[k] رارسم می کنیم.

۲- h [-k] را رسم نموده وبه اندازه ی د شیفت میدهیم تا h[n-k] به دست آید.

۳- x [k] و h[n-k] را در هم ضرب کرده و مجموع حاصلضرب را به دست می آوریم تا y[n] به دست آید

مثال) کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

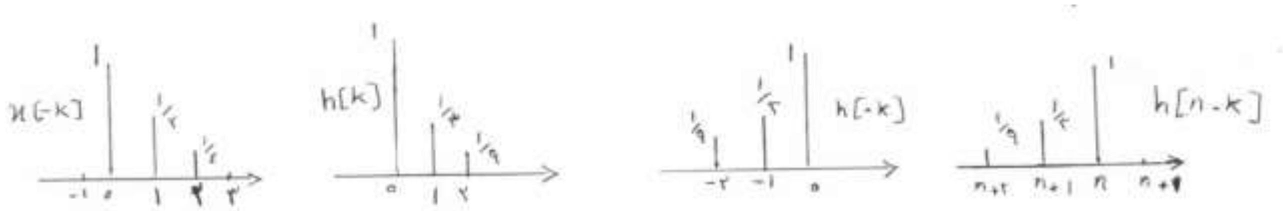
1) $y[n] = x[n] * \delta[n-2]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k-2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-2]\, h[n-k]$$

$$= x[n-2] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] = x[n-2]$$

$$\boldsymbol{x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]}$$

2) $x[n] = (\frac{1}{2})^n\, u[n]$ $\qquad$ $x[n] = (\frac{1}{3})^n\, u[n]$



$y[n] = 0 \qquad n \le -1$ $\qquad$ $y[0] = 1$

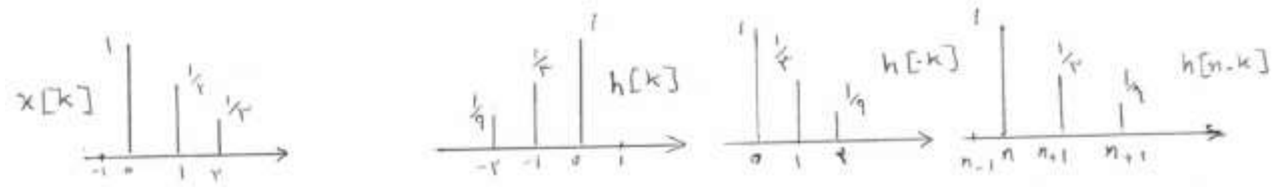
$y[1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\qquad$ $y[2] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k u[k]\, (\frac{1}{3})^{n-k} u[n-k]$$

$$(\frac{1}{3})^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{3}{2})^k u[k] \quad , \quad n \ge 0$$

$$(\frac{1}{3})^n \sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{2})^k$$

3) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \qquad\qquad h[n] = 3^n u[-n]$



$$n < 0 \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k u[k] 3^{n-k} u[-n+k]$$

$$= 3^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{1}{6})^k = 3^n \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}}$$

$$n \geq 0 \rightarrow 3^n \times \sum_{k=n}^{+\infty} (\frac{1}{6})^k$$

تمرین) کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

1) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \qquad\qquad h[n] = u[n+10] - u[n-10]$

2) $x[n] = u[n] - u[n-40] \qquad h[n] = u[n+10] + u[n-10]$

قضیه ی کانولوشن برای سیگنال های پیوسته:

هر سیگنال پیوسته برحسب تابع ضربه بصورت زیر قابل نمایش است .

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) \rightarrow LTI \text{ سیستم} \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = x(t) \times h(t)$$

کانولوشن های زیر را محاسبه کنید:

1) $x(t) = e^{-2t} u(t)$

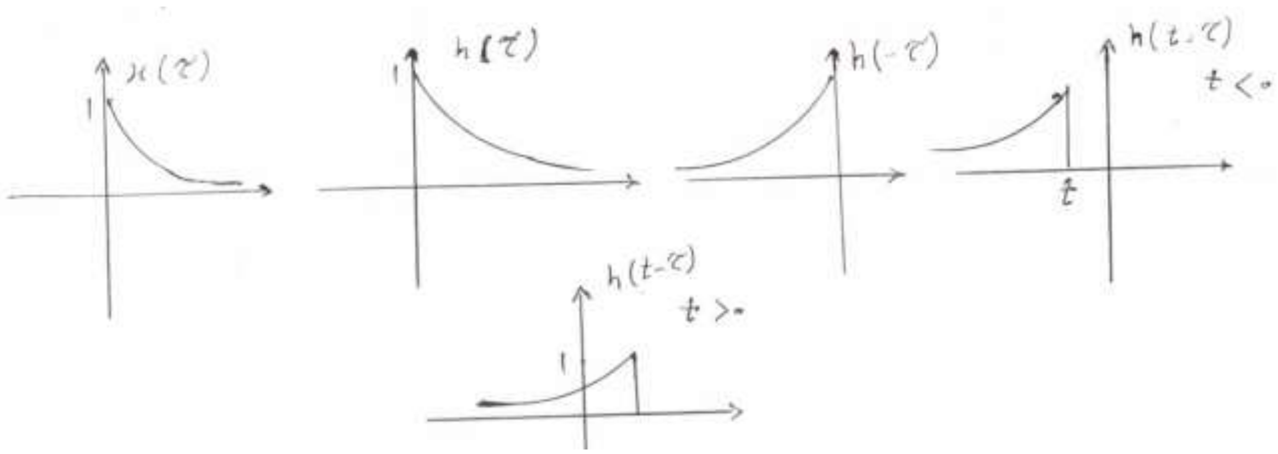
$h(t) = e^{-3t} u(t)$

حل)

۱- $h(\tau)$ و $x(\tau)$ را رسم می کنیم

۲- $h(\tau)$را نسبت به محور عمودی قرینه کرده و به ازای t شیفت می دهیم تا $h(t-\tau)$ به دست آید.

۳- $x(\tau)$ و $h(t-\tau)$را در هم ضرب کرده و از حاصلضرب انتگرال بگیرید تا $y(t)$ به دست آید



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau} u(\tau) e^{-3(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

تمرین)

$x(t) = 2[u(t) - u(t-2)] \qquad h(t) = e^{t}u(-t)$

خواص کانولوشن:

۱) جابجایی:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau$$

۲) شرکت پذیری:

$$x(t) * \ [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

۳) توزیع پذیری:

$$x[n] * h_i\{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

خواص سیستم های LTI

۱) حافظه دار بودن

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k] =$$

$$= \cdots + x[n-2]\, h[2] + x[n-1]\, h[1] + x[n]\, h[0] + x[n+1]\, h[-1] + x[n+2]\, h[-2] + \cdots$$

سیستم بدون حافظه :

$$y[n] = Ax[n] \rightarrow h[n] \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ A & n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h[n] = A\delta[n] \\ h(t) = a\delta(t) \end{cases}$$

۲) علی بودن: سیستمی که خروجی آن به ورودی وابسته نباشد (ضریب مولفه ها آینده ی آن صفر باشد).

$$\begin{cases} h[n] = 0 & n < 0 \\ h(t) = 0 & t < 0 \end{cases}$$

مثال)

$$h[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

۳) پایداری: سیستمی پایدار است که در آن

$$|x[n]| < B_x \rightarrow |y[n]| < B_y$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]\, h[k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]||h[k]|$$

$$\leq B_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\, B_y \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \frac{B_y}{B_x}$$

شرط لازم و کافی یک سیستم LTI آن است که پاسخ ضربه ی آن مطلقا جمع پذیر (انتگرال پذیر) باشد.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < m \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < m$$

مثال)

$$h[n] = \frac{u[n-1]}{n}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \to +\infty$$ ناپایدار

$$h(t = t(u(t+2))$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t\, u(t+2| dt = -\int_{-2}^{0} t dt + \int_{0}^{+\infty} t dt \to +\infty$$

تابع دوپلت و سایر توابع ویژه:

تابع دوپلت مشتق تابع ضربه است

$\delta($

$$u_1(t) \triangleq \frac{d\delta(t)}{dt}$$

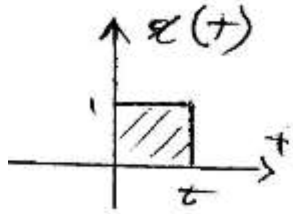
$$x(t) * u_1(t) = x(t) * \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} x(t) * \delta(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$u_k(t) \triangleq \frac{d^k \delta(t)}{dt^k}$$

مثال)

$x(t) = \cos u(t) \quad , \quad h(t) = u(t)$

$y(t) = u(t) * h(t) = ?$



$$y(t) = \frac{d}{dt}[-\sin t u(t) + \cos t\, \delta(t)]$$

$$y(t) = -sin\delta(t) - \cos t\, u(t) + u(t)$$

$$u(t) \triangleq u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

$$u_{-2} = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau = t\, u(t)$$

فصل سوم

سری فوریه سیگنال های LTIبیان ورودی برحسب یک سری از توابع پایه با ویژگی های زیر می تواند سودمند باشد .

- دسته ی بزرگی از سیگنال ها را می توان برحسب این توابع نوشت .
- خروجی این سیستم به سادگی به دست می آید.

یک دسته از این توابع پایه سیگنال های نمایی هستند . برای مثال سیگنال های زیر را در نظر بگیرید .

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\, h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} h(\tau) d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} h(\tau) d\tau$$
$$= x(t) H(j\omega_0)$$

$H(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} h(\tau) d\tau$ تبدیل فوریه پیوسته

$x[n] = z_0^n$ دلخواه یک عدد مختلط z_0

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\, h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_0^{n-k}\, h[k] = z_0^n \sum_{k-\infty}^{+\infty} h[k]\, z_0^{-k} = x[n]\, H[z_0\ ]$$

$H[z] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, z^{-k}$ تبدیلz

بنابرین میتوان $x(t)$ را به صورت مجموع یک سری از توابع نمایی بصورت زیر نوشت:

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{j\omega_0 t}$ سری فوریه پیوسته

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, H(jk\omega) e^{jkt\omega_0}$$

برای محاسبه ی ضرایب سری فوریه موقعی که سیگنال به صورت مجموعی از سیگنال ها است از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta j} + e^{-\theta j}}{2} \sin\theta = \frac{e^{\theta j} + e^{-\theta j}}{2j}$$

مثال) سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \frac{1}{3} + \frac{-1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos(5t + 45°)$$

$$T_0 = 2\pi \qquad\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4j}e^{j\omega} - \frac{1}{4j}e^{-j\omega} - \frac{1}{8}e^{-3j\omega} + \frac{1}{16}e^{j45}.e^{j5t} + \frac{1}{16}e^{-j45}.e^{-j5t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jkt}$$

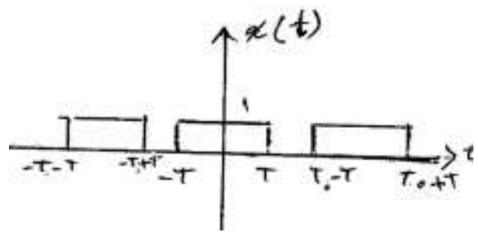
$$\frac{1}{3} = a_k e^{jkt} \rightarrow k = 0 \, , a_0 = \frac{1}{3}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{4j} a_3 = a_{-3} = \frac{-1}{8} a_5 = \frac{1}{16} e^{j45} a_{-5} = \frac{1}{16} e^{-j45}$$

در حالت کلی ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناوب از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

مثال) ضرایب سری فوریه قطار پالس زیر را محاسبه کنید .

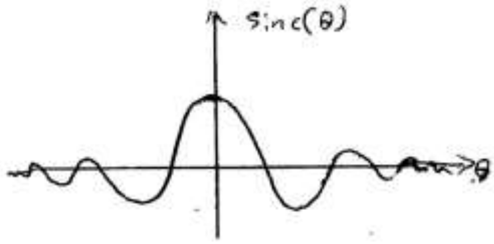


$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k \triangleq \frac{1}{T_0}\int_{-T}^{T}(1)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}.\frac{-1}{jk\omega}.e^{-jk\omega_0 t}\Bigg|_{-T}^{T} = \frac{1}{jk\frac{2\pi}{T_0}T}.2j\sin k\omega_0 T$$

$$\frac{\sin k\frac{2\pi}{T_0}T}{k\pi\frac{2T}{T_0}}.\frac{2T}{T_0} = \frac{2T}{T_0}\ sinc\ (\frac{2Tk}{T_0})$$



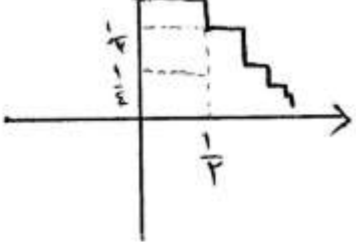
$$x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

شرایط همگرایی سری فوریه (شرایط دریکله):

۱- x (t)در یک دوره ی متناوب مطلقا انتگرال پذیر باشد.

۲- مقدار min , max در یک دوره ی تناوب محدود باشد.

۳- تعداد ناپیوستگی x(t) در یک دوره ی تناوب محدود باشد.



خواص سری فوریه

۱) خطی بودن

$$x_1(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k\ , T_0 x_2(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k\ , T_0$$

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} \alpha\ a_k + \beta b_k \quad , T_0$$

۲) انتقال زمانی

$$x(t) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} a_k$$

$$x(t-t_0) \overset{F_s}{\longleftrightarrow} b_k = a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0)\, e^{-jk\omega_0 t} dt\ \ , t' = t - t_0$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')\, e^{-jk\omega_0 t'} dt' = e^{-jk\omega_0 t_0}\ .\ \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')\, e^{-jk\omega_0 t'} dt'$$

مثال)

$$x(t) = \cos 3t = \frac{1}{2}e^{3j\omega} + \frac{1}{2}e^{-3j} \quad , \ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$x(t-2) = \cos 3(t-2) = \cos(3t-6) = \frac{1}{2}e^{3j\omega}.e^{-6j} + \frac{1}{2}e^{-3jt}.e^{6j}$$

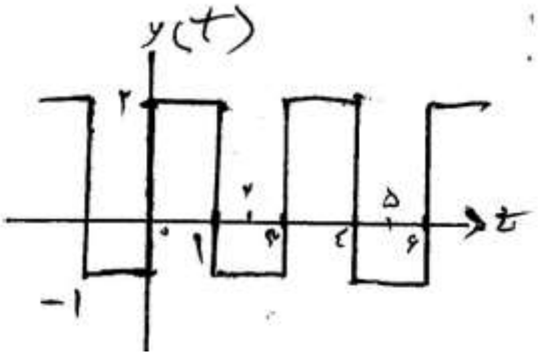
$$b_1 = \frac{1}{2}.e^{-6j} \quad , \qquad b_{-1} = \frac{1}{2}\ .e^{6j}$$

$$b_1 = a_k e^{-kj6}$$

$$b_1 = a_1 e^{-j6}$$

$$b_{-1} = a_{-1} e^{j6}$$

تمرین) ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را حساب کنید.



۳) وارون پذیری زمانی:

$$x(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k$$

$$x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k = a_{-k}$$

اگر x(t) زوج باشد :

$$x(t) = x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k = a_{-k}$$

اگر x(t) فرد باشد :

$$x(t) = -x(-t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_k = -a_{-k}$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه ی زمان :

$$x(\alpha t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} b_k = a_k \quad , \quad \omega_1 = \alpha\omega_0$$

$$x(\alpha t) = \sum a_k . e^{kj\omega_0 t\alpha} = \sum a_k . e^{kj\omega_1 t}$$

$$x(t) = \cos t \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \ , \omega_0 = 1$$

$$x(5t) = \cos 5t \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \ , \omega_0 = 5$$

۵) مزدوج گیری

$$x^*(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} a_{-k}^* a_k = \frac{2T}{T_0} sinc\ (\frac{12kT}{T_0})$$

$$x(t) = x^*(t) = a_k = a_{-k}^* \to \frac{2T}{T_0}\ \text{sinc}\ \left(\frac{-2kT}{T_0}\right) = \frac{2T}{T_0} sinc\ \frac{2kt}{T_0}$$

اگر $x(t)$ زوج باشد :

$$a_k = a_{-k}^*$$

$$a_k = a_{-k}$$

$$a_k = a_k^*$$

در این صورت ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج میشوند

اگر $x(t)$ فرد باشد:

$$a_k = a^*_{-k}$$

$$a_{-k} = -a^*_k$$

$$a_k = -a^*_k$$

در این صورت ضرایب سری فوریه موهومی خالص و فرد هستند.

$$x(t) = A\sin\omega_0 t \qquad a_1 = a_{-1} = \frac{-A}{2j}$$

۶) قضیه ی توان پارسوال :

$$F_\infty = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

فصل چهارم

تبدیل فوریه پیوسته

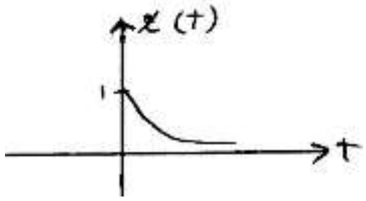
تبدیل فوریه ی یک سیگنال پیوسته و عکس آن چنین تعریف میشود:

$$X(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(T) e^{j\omega t} dt$$

$$x(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} dt$$

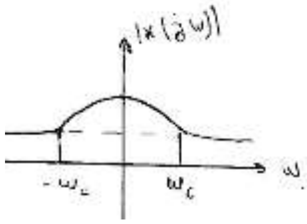
مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را به دست آورید :

1) $x(t) = e^{-at} u(t)\, , a > 0$

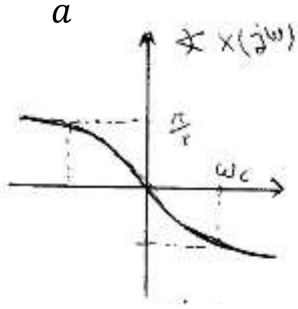


$$X(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Bigg|_{0}^{+\infty} = a + j\omega$$

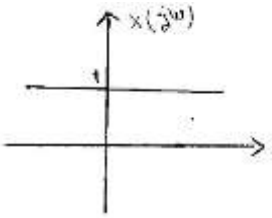
$$|X(j\omega| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



$$|X(j\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{2} |X(j\omega)|_{max} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2a} \quad \rightarrow \sphericalangle X(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$



2) $x(t) = \delta(t)$



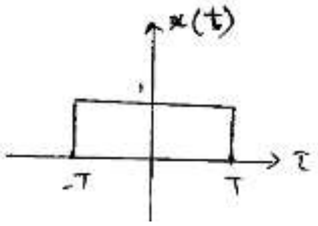
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t} dt = 1$$

تمرین) تبدیل فوریه سیگنال های زیر را به دست آورید:

$$x(t) = e^{-a|t|} \quad , \quad a > 0$$

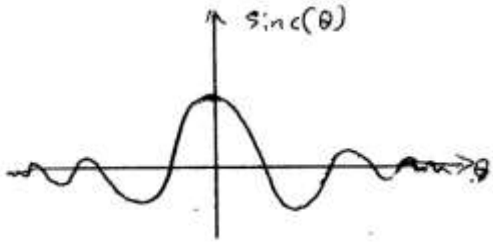
$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

مثال) عکس تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید:



$$X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_C\\ 0 & |\omega|>\omega_C\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi jt}e^{j\omega t}\Bigg|_{\omega_{-c}}^{\omega_c}=\frac{\sin\omega_c t}{\pi t}$$



تبدیل فوریه ی سیگنال های متناوب:

فرض کنید $X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

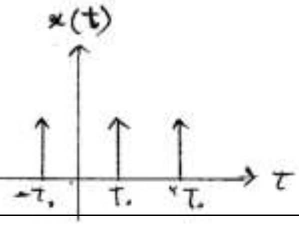
$$a_k\,e^{jk\omega_0 t}\leftrightarrow 2a_k\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

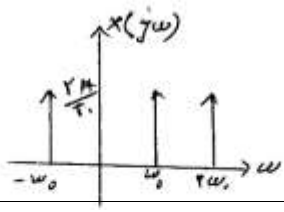
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k 2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$$

مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال زیر حساب کنید:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kt_0)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)\quad,\qquad\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$





خواص تبدیل فوریه ی پیوسته:

۱) خطی بودن:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega)$$

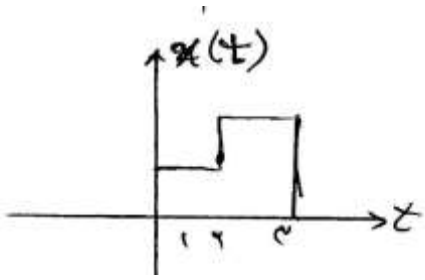
$$x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \overset{F_s}{\leftrightarrow} aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

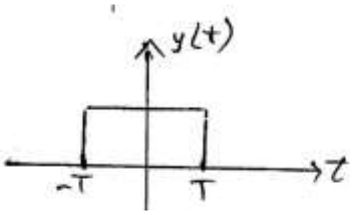
۲) انتقال زمانی:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega}.X(j\omega)$$

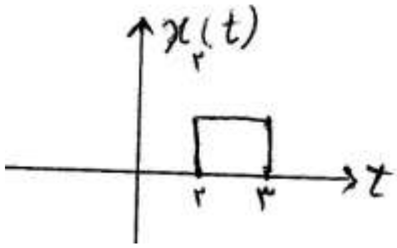
مثال) تبدیل فوریه ی سیگنال زیر را به دست آورید:

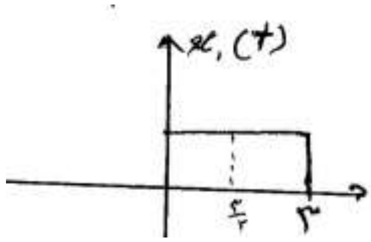


$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



$$y(j\omega) = \frac{2 \sin \omega t}{\omega}$$





$$x_1(t) = y\left(t - \frac{3}{2}\right), \qquad T = \frac{3}{2}$$

$$X_1(\omega j) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} y(j\omega)$$

$$X_1(\omega j) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\omega}$$

$$x_2(t) = y(t-2.5)\ ,\quad T = \frac{1}{2}$$

$$X_2(\omega j) = 2e^{-2.5j\omega}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}$$

۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه زمان:

$$x(\alpha t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|\alpha|}.X(\alpha j\omega)$$

مثال) $x(t) = e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+1}$

$$x(6t) = e^{-6t}u(6t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+6}$$

۵) مزدوج گیری :

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-j\omega)$$

اگر $x(t)$ **حقیقی باشد:**

$$x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

اگر سیگنال زوج باشد:

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$$

و اگر فرد باشد:

$$\sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_e(t) + x_o(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = X_R(j\omega) + jX_I(j\omega)$$

$$x_e(t) \xleftrightarrow{F} X_R(j\omega)$$

$$x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} jX_I(j\omega)$$

مثال)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$x_e(t) = \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \overset{F}{\longleftrightarrow} X_R(j\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

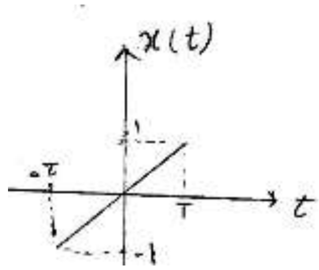
۶) مشتق و انتگرال گیری:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} v(j\omega) = j\omega LI(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi. X(0) . \delta(\omega)$$

تمرین) تبدیل فوریه ی سیگنال های زیر را حساب کنید:

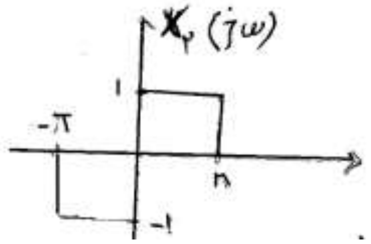


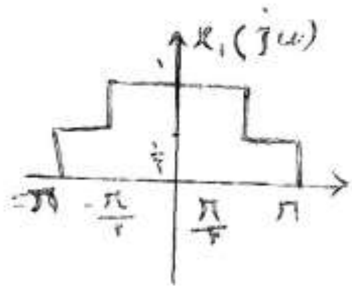
$$x(t) = \frac{t}{T}[u(t+T) - u(t-T)]$$

۷) قضیه ی انرژی پارسوال:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

مثال) برای سیگنال های زیر مطلوب است:





$$E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad , \qquad D_i = \left.\frac{dx_i(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$E_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X_1(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}.2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}.\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

$$E_2 = \frac{1}{2\pi}.2\pi = 1$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega.X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = \frac{1}{2\pi}.2\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, d\omega = j\frac{\pi}{2}$$

۸) قضیه ی کانولوشن:

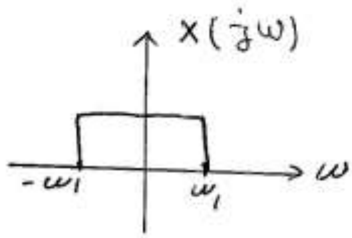
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega).H(j\omega)$$

$H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ پاسخ فرکانس سیستم

تابع تبدیل شبکه $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید:



$$x(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t} \quad , \quad h(t) = \frac{\sin \omega_2 t}{\pi t}$$

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_1 \\ 0 & |\omega| < W_1 \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_2 \\ 0 & |\omega| < W_2 \end{cases}$$

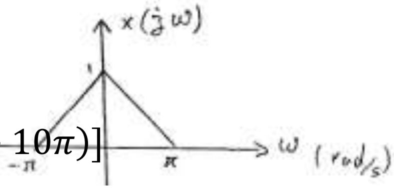
$$Y(j\omega) = X(j\omega).H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W_3 \\ 0 & |\omega| < W_3 \end{cases}$$

$$W_3 = \min(W_1\ , W_2)$$

۹) ضرب دو سیگنال:

$$r(t) = x(t)\,.\,s(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\,X(j\omega) * s(j\omega)$$

مثال) با توجه به سیگنال $R(j\boldsymbol{\omega}).\,X(j\boldsymbol{\omega})$ را رسم کنید.



$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * [\pi\,\delta(\omega - 10\pi) + \pi\,\delta[\omega + 10\pi)]$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X\big(j(\omega - 10\pi)\big) + \frac{1}{2}X(j(\omega + 10\pi)$$

فصل ۹

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک سیگنال چنین تعریف میشود:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad , \quad s = \sigma + j\omega$$

مثال)

$$x(t) = -e^{-at} u(-t)$$

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} e^{-(a+s)t} \Big|_{-\infty}^{0}$$

$$\frac{1}{s+a} \quad , \quad Re[s+a] < 0$$

مثال)

$$e^{-t} u(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1-3j} \quad , \quad Re[s+1-3j] > 0 \quad , \quad Re[s] > -1$$

مثال)

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \rightarrow for\ alls$$

خواص ناحیه ی همگرایی:

۱) Rocبه صورت نوار هایی موازی محور $j\omega$ باشدکه شامل هیچ قطبی نیست

۲) اگر x(t) دارای طول محدود و انتگرال پذیر باشد ، Roc کل صفحه ی s است.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & else \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^t e^{-sT} dt = \frac{1 - e^{-st}}{s} \quad X(0) = T$$

۳) اگر x(t)سمت راستی وX(s) گویا باشد Roc سمت راستِ راست ترین قطب قرار میگیرد.

$$X(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots}$$

۴) اگر x(t) سمت چپی و X(s) گویا باشد Roc سمت چپِ چپترین قطب قرار میگیرد.

۵) اگر x(t) دو طرفه باشد ، Roc یا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

مثال)

$$x(t) = e^{-at} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$Re[s] > -a \quad , \quad Re[s] < a \qquad \rightarrow -a < Re[s] < a$$

*اگرمحور $j\omega$ داخل Roc باشد میتوان تبدیل لاپلاس را به فوریه تبدیل کرد.

مثال) کلیه ی سیگنال هایی رامشخص کنید که تبدیل لاپلاس آنها به صورت زیر است:

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2(s-3)}$$

$$= \frac{k_{11}}{s+j} + \frac{k_{12}}{(s+j)^2} + \frac{k_{21}}{s-j} + \frac{k_{22}}{(s-j)^2} + \frac{k_3}{s-3}$$

$$k_{11} = k_{21}^*$$

$$k_{22} = k_{12}^*$$

$$k_{12} = (s+j)^2 . s \Big|_{s=-j} \qquad k_{11} = \frac{d}{ds}(s+j)^2 . s) \Big|_{s=-j}$$

خواص تبدیل لاپلاس:

۱) خطی بودن:

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad , \quad Roc: R_1$$

$$y(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) \quad , \quad Roc: R_2$$

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{L} aX(s) + bY(t) \quad , \quad Roc: R_1 \cap R_2$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} \quad , \quad Re[s] > -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re[s] > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re[s] > -2$$

۲) انتقال زمانی:

$$x(t-t_0).\, e^{-st}X(s) \quad , \quad Roc: R_1$$

۳) وارون سازی زمانی:

$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+2} \quad , \quad Re[s] > -2$$

$$e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-2} \quad , \quad Re[s] < 2$$

۴) تغییر مقیاس در حوزه ی زمان:

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X({}^{s}/_{a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at)e^{-st}dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\frac{s}{a}}dt$$

مثال)

$$\delta(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} 1$$

$$\frac{1}{5}\delta(t) = \delta(5t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{5}$$

$$u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} \quad , \quad Re[s] > 0$$

۵) مزدوج گیری:

$$x^*(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X^*(s)$$

$$x^*(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega)$$

۶) مشتق گیری:

$$x'(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} sX(s) \quad , \quad Roc: R_1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{X(s)}{s}, \quad Roc: R_1 \cap Re[s] > 0$$

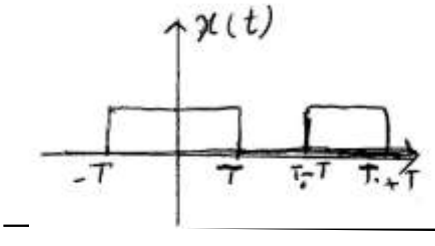
۷) انتگرال گیری :

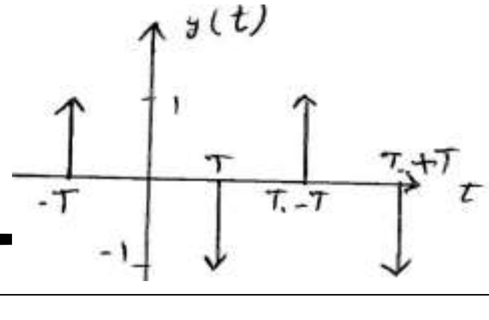
$$x(t) \overset{F_S}{\leftrightarrow} a_k$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F_S}{\leftrightarrow} (jk\omega_0)a_k$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F_S}{\leftrightarrow} \frac{a_k}{jk\omega_0} \quad , \quad a_0 = 0$$

مثال) ضرایب سری فوریه ی سیگنال های زیر را محاسبه کنید:





$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \overset{F_S}{\leftrightarrow} b_k = (jk\omega_0)\frac{2T}{T_0} sinc\,(\frac{2kT}{T_0})$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{A}^{A+T_0} [\delta(t+T) - \delta(t-T)]e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\frac{1}{T}\int \delta(t+T)e^{jk\omega_0 t}\,dt - \delta(t-T)]e^{-jk\omega_0 t}dt$$

۸) مشتق گیری در حوزه ی s (لاپلاس)

$$tx(t) \overset{l}{\longleftrightarrow} \frac{-dX(s)}{ds} \text{ و } Roc: R_1$$

مثال)

$$e^{at}u(t) \overset{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a} \text{ و } Re[s] > a$$

$$te^{at}u(t) \overset{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-a)^2} \text{ و } Re[s] > a$$

$$\frac{t^n}{n!}e^{at}u(t) \overset{l}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \text{ و } Re[s] > a$$

۹) کانولوشن

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s)H(s) \qquad , \qquad Roc: R_1 \cap R_2$$

تمرین : فرض کنید ورودی یک سیستم LTI به صورت $x(t)=e^{-t}u(t)$ و خروجی آن به صورت $y(t)=e^{-2t}-e^{-3t}$ باشد مطلوب است: پاسخ ضربه ی سیستم ، پاسخ ضربه ی سیستم وارون و معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده ی ورودی و خروجی.

۱۰) قضایای مقادیر اولیه و نهایی

$$x(0^+) = \lim_{s\to+\infty} sX(s)$$

$$x(+\infty) = \lim_{s\to 0^+} sX(s)$$

مثال) فرض کنید:

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} \qquad , \qquad Re[s] > -1$$

مطلوب است $x(0^+)$ و $x(+\infty)$:

$$x(0^+) = \lim s \,.\, \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} = 2$$

$$x(+\infty) = \lim s \,.\, \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)} = 0$$

خواص سیستم های LTI

۱) علی بودن: شرط علی بودن آن است که $h(t) = 0 \;,\; t < 0$. بنابرین اگر $\mathrm{H(s)}$ گویا و $\mathrm{h(t)}$ علی باشد Roc آن سمت راستی است.

۲) پایداری: شرط پایداری آن است که پاسخ ضربه ی آن مطلقا انتگرال پذیر باشد . بنابرین دارای تبدیل فوریه است . پس شرط پایداری آن است که محور $j\omega$ داخل Roc باشد.

اگر $H(s)$ گویا و $h(t)$ علی باشد شرط پایداری آن است که کلیه ی قطب های $H(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار گیرند.

مثال

$$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \leq \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{2t} dt \ \rightarrow \ +\infty$$

$h(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t) \quad , \quad -1 < Re[s] < 2$ غیر علی و پایدار

مثال) فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI مشخص شده اند . تابع تبدیل آن را رسم کنید.

۱) سیستم علی است

۲) تابع تبدیل آن گویا بوده و فقط دو قطب در $s = -2 \ , \ s = 1$ دارد

۳) اگر $x(t) = 1$ باشد ، $y(t) = 0$ میشود

۴) $h(0^+) = 4$

$$H(s) = \frac{p(s)}{Q(s)} = \frac{p(s)}{(s-1)(s+2)}$$

$$e^{at} \xrightarrow{\text{خروجی}} H(a)e^{at}$$

$$1 = e^{0t} \rightarrow H(0)e^{0t} = 0 \Rightarrow H(0) = 0$$

$$p(s) = (s - z_1)(s - z_2) \ldots$$

$$= \frac{s(s - z_2)(s - z_3) \ldots}{r(s)}$$

$$H(s) = \frac{s\, r(s)}{(s-1)(s+2)}$$

تمرین)

یک سیستم علی و پایدار با پاسخ ضربه ی $h(t)$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید $H(s)$ گویا بوده و قطبی در $s=-2$ داشته و در مبدا صفر ندارد. صحت یا عدم صحت روابط زیر را تعیین کنید.

الف) $F\{h(t)e^{3t}\}$ همگرا است

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$

ج) $t\,h(t)$ پاسخ ضربه ی یک سیستم علی و پایدار است

د) $h(t)$ دارای طول محدود است

هـ) $\frac{dh(t)}{dt}$

و) $H(s)=H(-s)$

فصل ۱۰

تبدیل Z

تبدیل z یک سیگنال گسسته چنین تعریف میشود .

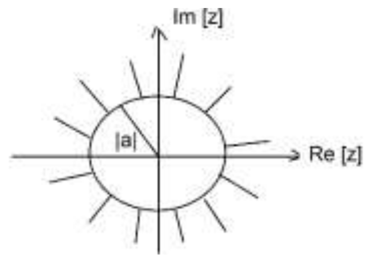
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad , \quad z = re^{j\omega}$$

اگر r=1 باشد تبدیل z گسسته است.

مثال) تبدیل z سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$



$$2) x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} (a^{-1} z)^m = 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} (a^{-1} z)^m$$

$$= 1 - \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

تمرین)

تبدیل z سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

$$1) x[n] = 2(\frac{1}{3})^n u[n] - 4(-2)^n u[n]$$

$$2) x[n] = (\frac{1}{3})^n cos\frac{n\pi}{4} u[n]$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل z

۱) Roc به صورت دیسک هایی به مرکز مبدا مختصات است.

۲) Roc شامل هیچ قطبی از X(z) نیست.

۳) اگر x[n] دارای طول محدود باشد ، Roc کل صفحه ی z ، احتمالا z=0 یا z=∞ است.

۴) اگر x[n] سمت راستی و X(z) گویا باشد ، Rocناحیه ی بیرونی خارجی ترین قطب است . اگر x[n] علی باشد z=∞ را شامل میشود .

۵) اگر x[n] سمت چپی وX(z) گویا باشد ، Roc ناحیه ی داخلیِ داخلی ترین قطب است و اگر x[n] ضد علی باشد z=0 را نیز شامل میشود.

ضد علی $x[n] = 0 \quad , \quad n \geq 0$

۶) اگر x[n] دو طرفه باشد Rocیا محدود به قطب ها شده یا اصلا وجود ندارد.

مثال)

$$x[n] = a^{|n|} = a^n \, u[n] + a^{-n} \, u[-n-1]$$

$$X(z) = \underset{\downarrow}{\frac{1}{1 - az^{-1}}} - \underset{\downarrow}{\frac{1}{1 - a^{-1}z^{-1}}}$$

$$|z| > |a| \quad , \quad |z| < \frac{1}{|a|} \Rightarrow |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

مثال) کلیه ی سیگنال هایی را مشخص کنید که تبدیل z آنها به صورت زیر است.

$$X(z) = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + 3z^{-1}}$$

$$k_1 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Bigg|_{z = \frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$k_2 = (1+3z^{-1})X(z)\Big|_{z=-3} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{k_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \to \begin{cases} k_1(\frac{1}{2})^n u[n] \ , \ |z| > \frac{1}{2} \\ -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] \ , \ |z| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{k_2}{1+3z^{-1}} \to \begin{cases} k_2(-3)^n u[n] \ , \ |z| > 3 \\ -k_2(-3)^n u[-n-1] \ , \ |z| < 3 \end{cases}$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] + k_2(-3)^n u[n], \quad |z| > 3$$

$$x[n] = k_1(\frac{1}{2})^n u[n] - k_2(-3)^n u[-n-1] \quad , \quad \frac{1}{2} < |z| < 3$$

$$x[n] = -k_1(\frac{1}{2})^n u[-n-1] - k_2(-3)^n u[-n-1] \quad , \quad |z| < \frac{1}{2}$$

مثال) عکس تبدیل z سیگنالهای زیر را محاسبه کنید:

1) $X(z) = 5z^3 - 2z - 3 + z^{-2} + 4z^{-5}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$x[-3] = 5$ $\qquad$ $x[-1] = -2$ $\qquad$ $x[0] = -3$

$x[2] = 1$ $\qquad$ $x[5] = 4$

2) $X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad , \quad |z| < |a|$

$$\ln(1+V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}$$

$X(z) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-1}}{n} \qquad\qquad x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}\, u[n-1]$$

خواص تبدیل z

۱) خطی بودن:

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{z} a X_1(z) + b X_2(z)$$

$Roc:\ R_1 \cap R_2$ حداقل

۲) انتقال زمانی:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$$

۳) تغییر مقیاس در حوزه ی z

$$z_0^n\, x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

۴) وارون سازی زمانی:

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X(z^{-1})$$

۵) کانولوشن :

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{z} y(z).H(z)$$

مثال) کانولوشن زیر را حساب کنید .

$$x[n] = (\frac{1}{3})^{n-1} u[n-1] \qquad h[n] = u[n]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \quad , \quad H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{3} |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} k_1, k_2 = \frac{3}{2}$$

$$y[n] = \frac{3}{2}\ u[n] - \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^n\ u[n]$$

۶) مشتق گیری :

$$nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{-z\ dX(z)}{dt}$$

مثال) عکس تبدیل z سیگنال زیر را به دست آورید

$$1) X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\ .\ \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|$$

۷) قضیه ی مقدار اولیه :

$$x[0] = \lim_{z \to +\infty} X(z) \quad , \quad x[n] = 0 \quad , \quad n < 0$$

*شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI گسسته آن است که Roc شامل دایره ی واحد شود یا اگر h[n] علی و H(z) گویا باشد شرط پایداری آن است که کلیه قطب های H(z) در دایره ی واحد قرار گیرند.