



به نام خدا



مبانی فیزیک ۲

دانشگاه علمی – کاربردی شرکت تولیدی لاستیک دنا

مدرس:

زهرا اسدی

zahra.asadi6640@yahoo.com

معرفی کتاب

ویرایش هشتم سال ۲۰۰۸

مبانی فیزیک

جلد دوم: الکتریسیته و مغناطیس

دیوید هالیدی - رابرت رزنیک - جرج واکر





فصل سوم: قانون گاوس

■ مقدمه

■ شار میدان الکتریکی

■ قانون گاوس

■ قانون گاوس و قانون کولن

■ رسانای عایق بندی شده

مقدمه

- ملاحظه کردیم که برای بدست آوردن میدان E با آگاهی داشتن از توزیع بار می توان میدان E را محاسبه کرد.
- این روش بسیار پر زحمت است.
- روش دیگر محاسبه میدان استفاده از قانون گوس است.



مقدمه

- تنها مسائلی را می توان با **قانون گوس** حل کرد که **توزیع بار** **تقارن** **کافی** داشته باشد مانند بار نقطه ای، بار با توزیع یکنواخت کروی و.....
- قبل از بحث قانون گوس به تعریف مفهوم **شار الکتریکی** می پردازیم.

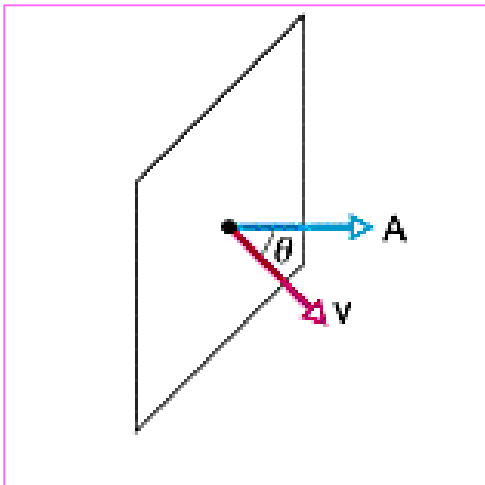
شار میدان الکتریکی

■ شار الکتریکی تعداد خطوط میدان عبوری از یک سطح است.

■ شار کمیتی اسکالر است

■ در حالتی که میدان الکتریکی یکنواخت باشد و زاویه بردار عمود بر

سطح با امتداد میدان θ باشد:

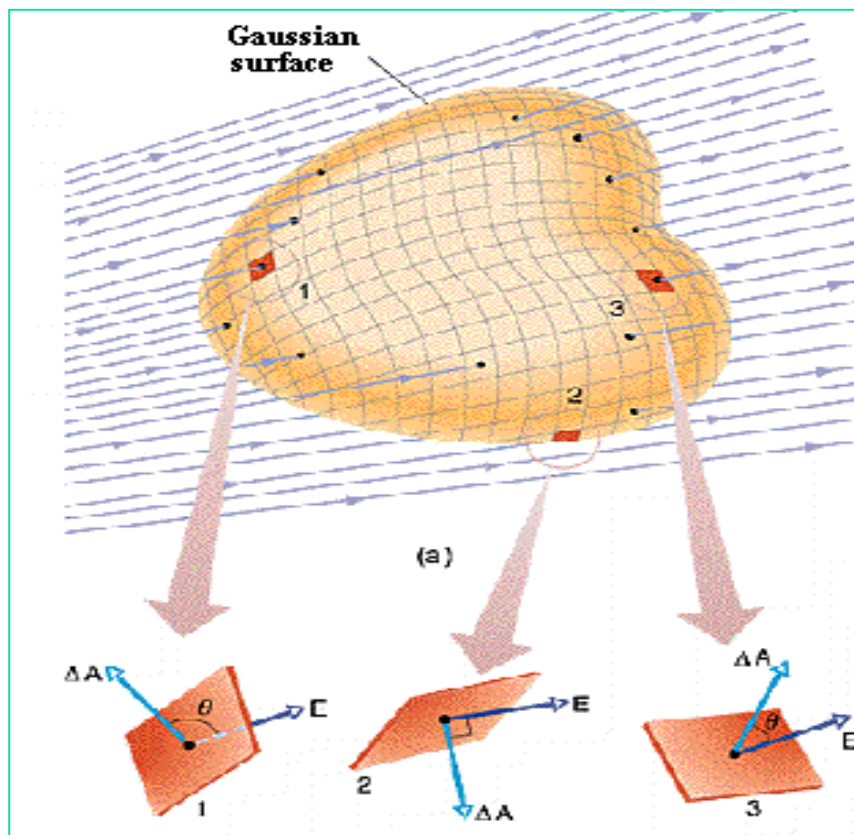


$$\Phi = EACos\theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

شار میدان الکتریکی

■ اگر میدان الکتریکی **یکنواخت نباشد** و سطح نیز **بسته** باشد شار

الکتریکی عبوری از آن :



$$\Phi = \sum E \cdot \Delta A$$

شار میدان الکتریکی

■ تعریف دقیق شار الکتریکی با میل دادن ΔA به سمت صفر حاصل

می شود که Σ به \int تبدیل می گردد:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

■ در فرمول فوق بردار $d\mathbf{A}$ عمود بر سطح بسته \mathbf{A} است که جهت آن به سمت خارج سطح بسته است.



شار میدان الکتریکی

- دایره روی علامت انتگرال نشان می دهد که سطح انتگرالگیری باید بسته باشد.
- انتگرال فوق یک انتگرال سطحی است و باید روی سطح بسته A گرفته شود .
- سطح A هر سطح دلخواه بسته است

مثال

مثال ۱

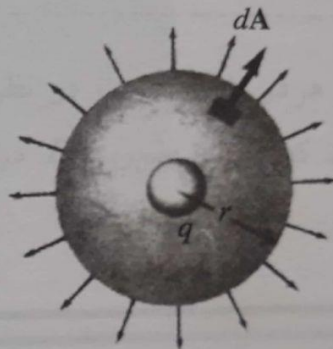
(شار الکتریکی در قرص) قرصی به شعاع 0.1m که بردار
یکه قائم \hat{n} آن با امتداد E زاویه 30° می‌سازد مفروض
است. اندازه E برابر $2 \times 10^3 \text{ N/C}$ است.

الف) شار الکتریکی کل که از قرص می‌گذرد. ب) شار
الکتریکی کل در حالتیکه قرص بر E عمود باشد را بیابید؟
ج) شار الکتریکی کل را اگر قرص موازی E قرار گیرد بیابید.
حل:

الف) برای محاسبه شار باید dA را بیابیم یعنی:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi (0.1)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \Phi_E &= E A \cos \phi = 2 \times 10^3 \times 0.0314 \times \cos 30^\circ \\ &= 54 \text{ Nm}^2/\text{C} \end{aligned}$$



شکل ۲ شار الکتریکی Φ_E که از قرص عبور می کند که به زاویه ای که قائم n با میدان E می سازد بستگی دارد.

(ب) n عمود بر E باشد:

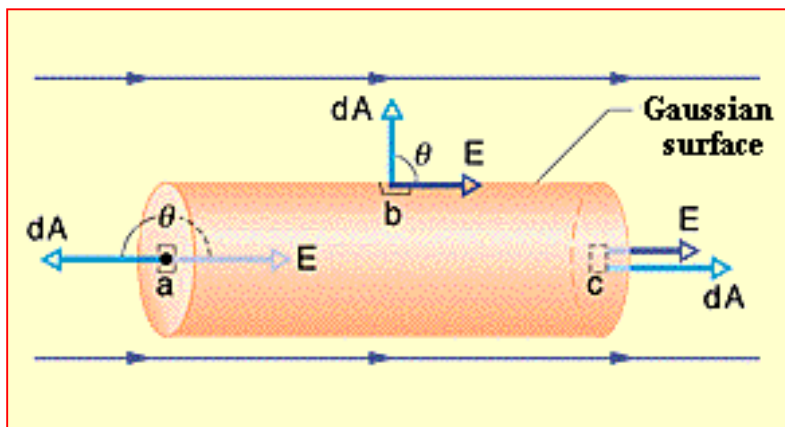
$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \Phi_E = 0$$

(ج) اگر n موازی E باشد:

$$\cos \phi = 1 \Rightarrow \Phi = E A \cos \phi$$

$$\Phi = 2 \times 10^3 \times 0.0314 \times 1 = 63 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

- مثال: شکل زیر یک استوانه فرضی بسته را نشان می دهد که در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد . شار الکتریکی مربوط به این سطح بسته چقدر است؟



$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E(\cos 180^\circ) dA = -E \int dA = -EA,$$

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E(\cos 0) dA = EA.$$

$$\int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E(\cos 90^\circ) dA = 0$$

$$\Phi = -EA + 0 + EA = 0.$$

انتگرال

$$\int dx = x$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_2^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_2^5 = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}$$

$$\iint dA = \int dx \int dy = xy = A$$

$$\iiint dv = \int dx \int dy \int dz = xyz =$$

توابع مثلثاتی

θ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده



ضرب داخلی و ضرب خارجی

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

قانون گاوس

- قانون گوس شار الکتریکی عبوری از یک سطح فرضی بسته را به بار داخل آن ربط می دهد.

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\Phi = \oint E \cdot dA$$

- و یا با استفاده از فرم انتگرالی:

$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{enc}$$

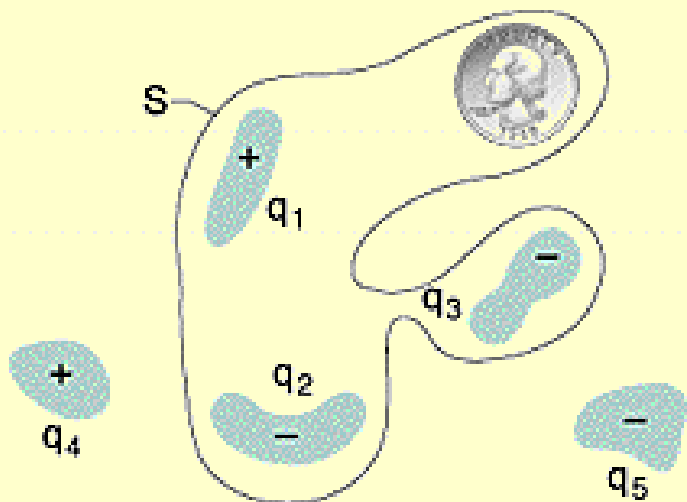
مثال

شکل زیر سه لامپ باردار و یک سکه بدون بار را نشان می دهد. سطح مقطع سطح فرضی بسته گوس نشان داده شده است. شار الکتریکی عبوری از سطح را با فرض $q_1=3.1\text{nc}$, $q_3=-3.1\text{nc}$, $q_2=-5.2\text{nc}$ بدست آورید.

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} = \frac{(3.1 - 3.1 - 5.2) \times 10^{-9}}{8.85 \times 10^{-12}}$$

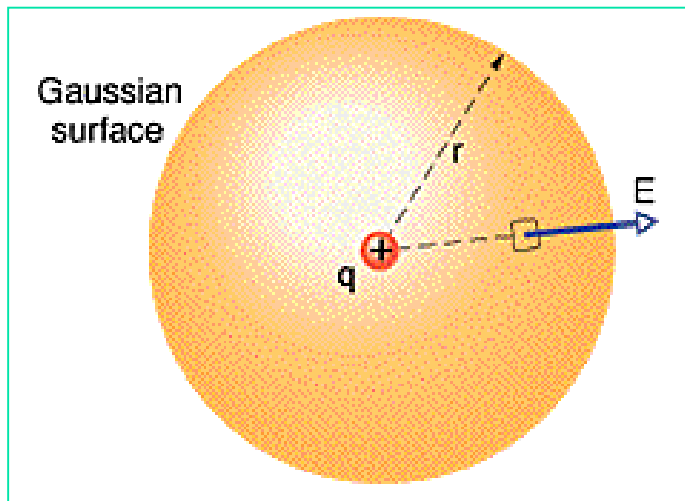
$$\Phi = -670 \text{ N.m}^2/\text{C}$$



قانون گاوس و قانون کولن

می توان قانون کولن را با استفاده از قانون گوس بدست آورد:

اثبات: شکل زیر یک بار مثبت را نشان می دهد که یک سطح کروی بسته (سطح گوس) به شعاع r حول آن زده شده است:



بار داخل سطح q و میدان در تمام نقاط سطح یکسان و هم جهت با بردار عمود تر سطح است پس:

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \oint E dA = q_{\text{enc.}}$$

$$E \epsilon_0 \oint dA = q$$

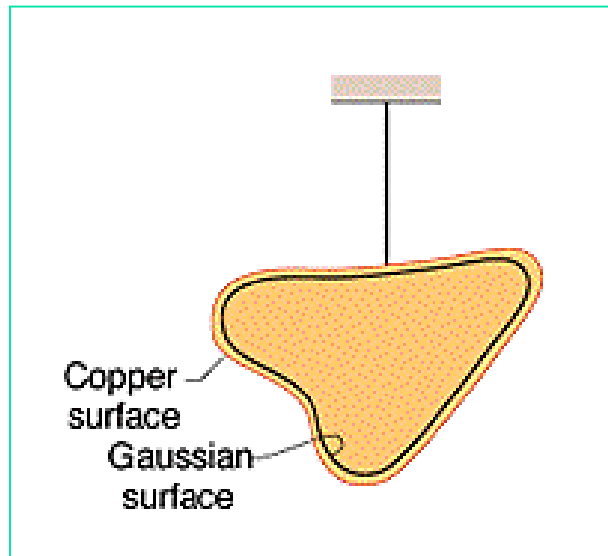
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

رسانای عایق بندی شده

■ به کمک **قانون گوس** می توان نشان داد که :

بار اضافی واقع بر یک رسانای عایق بندی شده تماما "روی سطح خارجی آن

باقی می ماند.





رسانای عایق بندی شده

میدان الکتریکی در حالت الکترو استاتیک در داخل جسم یک رسانا **صفر** است.

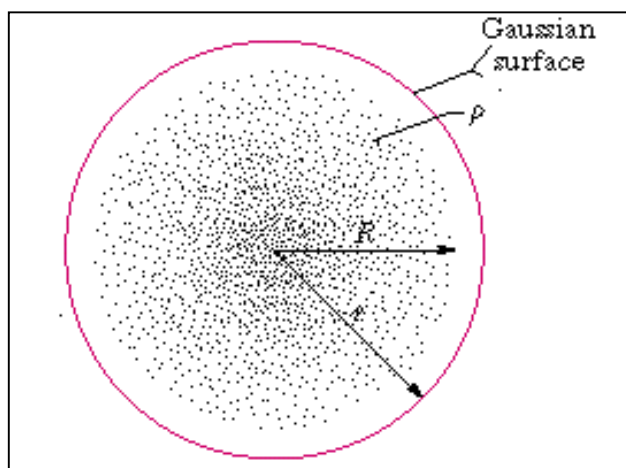
اگر **سطح گوس** را بلافاصله **زیر سطح خارجی** جسم رسانا انتخاب کنیم. شار

الکتریکی عبوری از آن **صفر** است پس بار خالص داخل آن **صفر** است **پس بار**

اضافی روی **سطح خارجی** قرار می گیرد.

مثال

بار q بطور یکنواخت در داخل کره ای به شعاع R توزیع شده است شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گوس برای نقاط داخل و خارج کره بر حسب فاصله از مرکز کره بدست آورید



■ حل: در $r > R$ تمام بار q داخل سطح

گوس است:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

پاسخ

$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{enc}$$

در $r < R$:

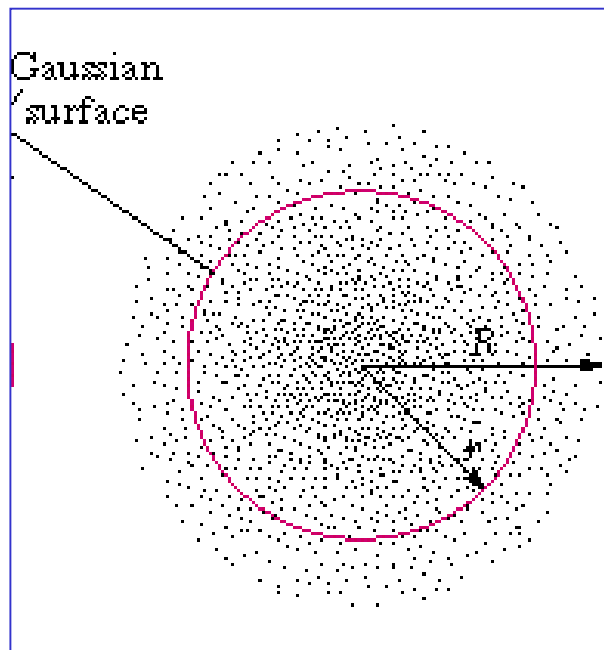
$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = \epsilon_0 E A = \epsilon_0 E (4\pi r^2) = \dot{q}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{q}}{r^2}$$

که در آن \dot{q} بخشی از q هست که داخل دایره ای به شعاع r قرار دارد.

$$\dot{q} = q \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = q \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}$$



مثال

شکل زیر یک خط نامتناهی بار با چگالی بار یکنواخت (یعنی بار واحد طول که بر حسب کولن بر متر است) را نشان می دهد. رابطه مربوط به E در فاصله r از این خط را پیدا کنید.

سطح گوس را استوانه ای به شعاع r انتخاب می کنیم . میدان الکتریکی در تمام نقاط سطح استوانه یکسان است پس :

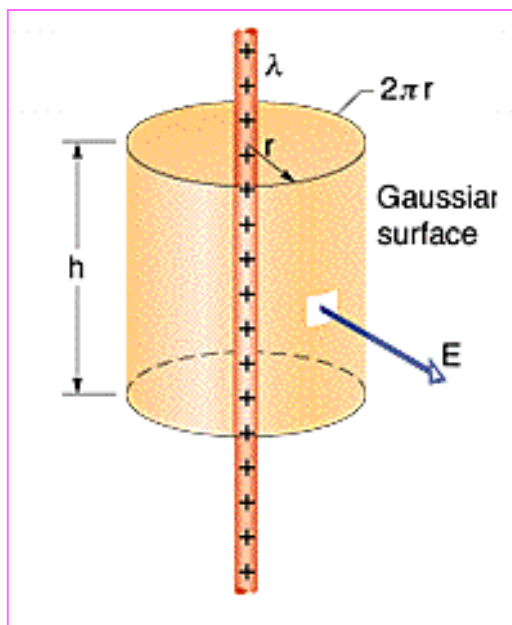
$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\Phi = EA \cos \theta = E(2\pi r h)$$

$$\epsilon_0 E(2\pi r h) = \lambda h$$

$$\lambda = \frac{q}{h}$$

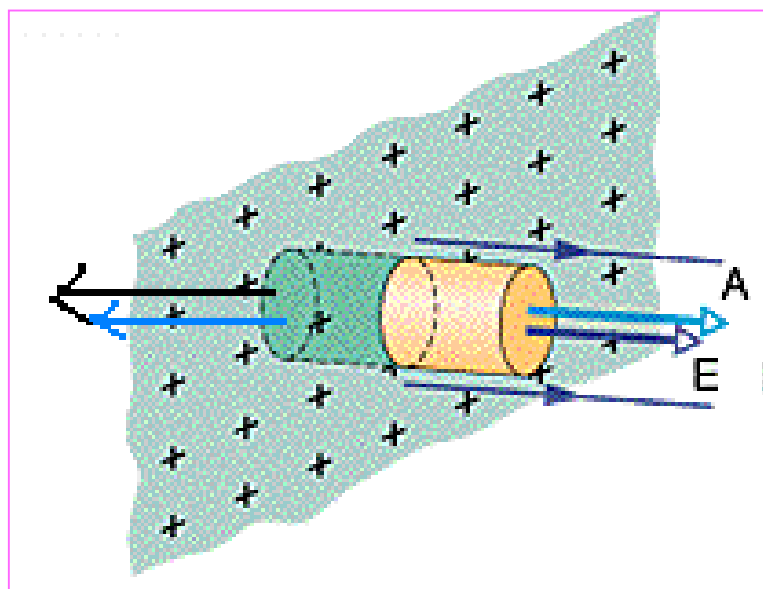
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



مثال

شکل زیر یک ورقه نارسانای نازک بار را با چگالی سطحی بار ثابت σ (یعنی بار واحد سطح بر حسب کولن بر متر مربع) نشان میدهد مقدار E در فاصله r در جلو ورقه چقدر است؟

سطح گوس استوانه بسته کوچکی به مقطع A و ارتفاع $2r$ است. تنها از سطح مقطع A آن شار می گذرد.



$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{enc}$$

E سطح جانبی استوانه را قطع نمیکند شار در این سطح سهمی ندارد. پس قانون گاوس به صورت زیر در میاد

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

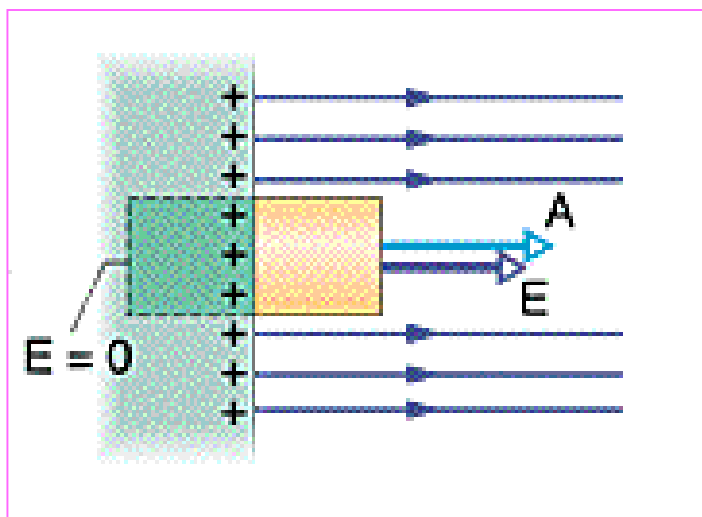
مثال

شکل زیر یک ورقه رسانای بار را با چگالی سطحی بار ثابت σ (یعنی بار واحد سطح بر حسب کولن بر متر مربی) نشان می دهد مقدار E در فاصله r در جلو ورقه چقدر است؟

$$\epsilon_0 \oint E \cdot dA = q_{enc}$$

میدان در داخل رسانا صفر است.

پس فقط از یکی از سطح مقطعها شار می گذرد



$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



اگر میخواهید خوشبخت باشید زندگی را به یک هدف
گره بزنید نه به آدم ها و اشیاء

البرت انیشتین