به نام خدا

دانشگاه یزد
Yazd University

مبانی فیزیک ۱

دانشکده فیزیک دانشگاه یزد

مدرس:
زهرا اسدی
zahra.asadi6640@yahoo.com

فصل سوم: بردارها

دیوید هالیدی ـ رابرت رزنیک

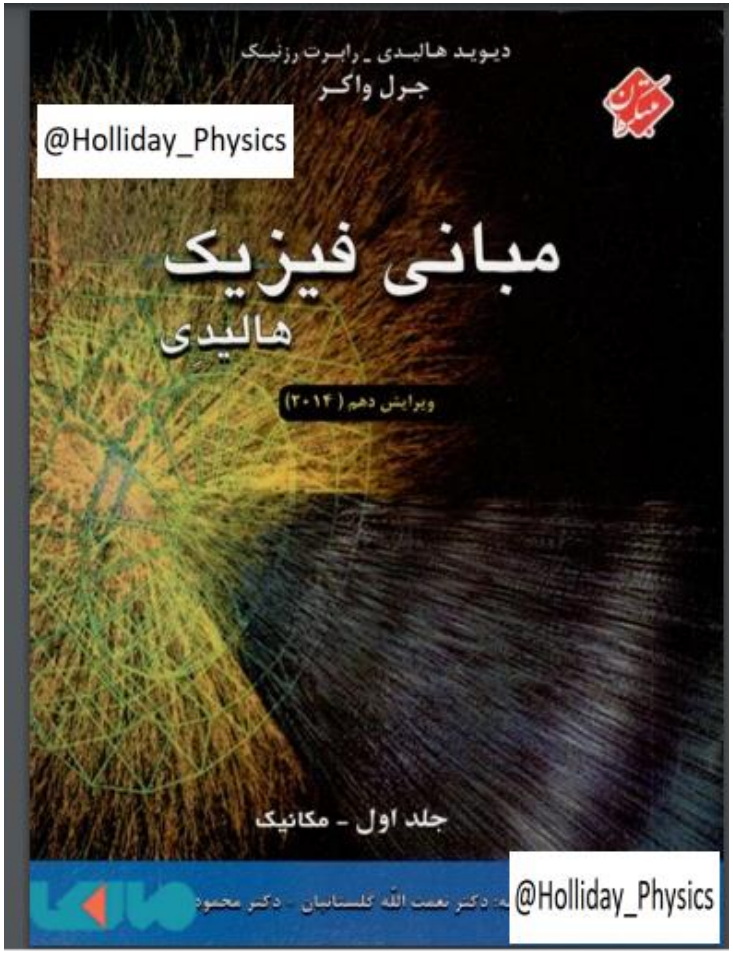
جرل واکر

مبانی فیزیک

هالیدی

ویرایش دهم (۲۰۱۴)

جلد اول ـ مکانیک



بردارها

- کمیتهای نرده ای و برداری
- جمع و تفریق بردارها
- مولفه های بردار
- ضرب بردارها

هدف های آموزشی

- رسم بردارها و به کار بردن قوانین جابه جایی و شرکت پذیری
- تعیین بزرگی بردارها
- جمع ، تفریق و ضرب بردارها.
- پیدا کردن زاویه بین بردارها و تبدیل زاویه ها بر حسب رادیان و درجه به یکدیگر

کمیت های نرده ای و برداری

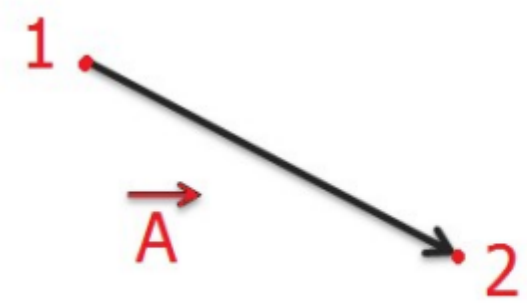
- کمیت هایی که با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص می شوند و از این رو فقط دارای بزرگی هستند کمیت های نرده ای می گویند. مانند طول، زمان، چگالی، جرم، انرژی و دما و ...

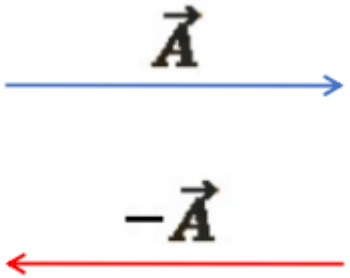
- کمیت هایی که علاوه بر اندازه دارای جهت هستند کمیت های برداری نام دارند مانند نیرو، سرعت، شتاب، جابجایی و ...

کمیت های نرده ای و برداری

- محاسبات مربوط به کمیت های نرده ای قواعد معمولی جبر است.

- در صورتی که محاسبات مربوط به کمیت های برداری از قوانین جمع برداری پیروی می کنند.



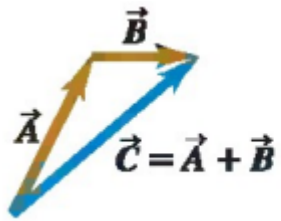


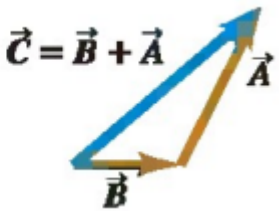
$$\left|\vec{A}\right| = A$$

جمع و تفریق بردارها

- برای جمع بردارها دو روش وجود دارد

❖ روش مثلثی





❖ روش متوازی الاضلاع

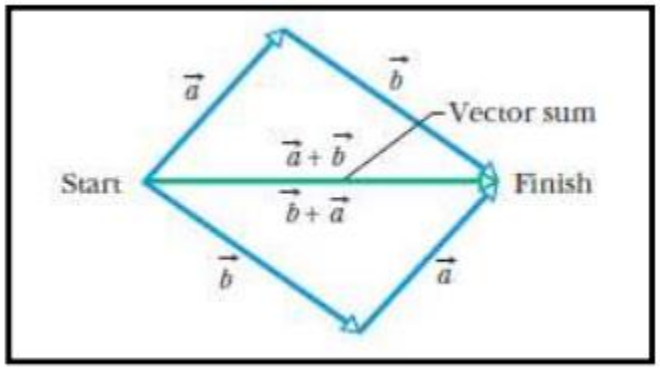
- تفریق بردارها

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

قوانین جمع برداری

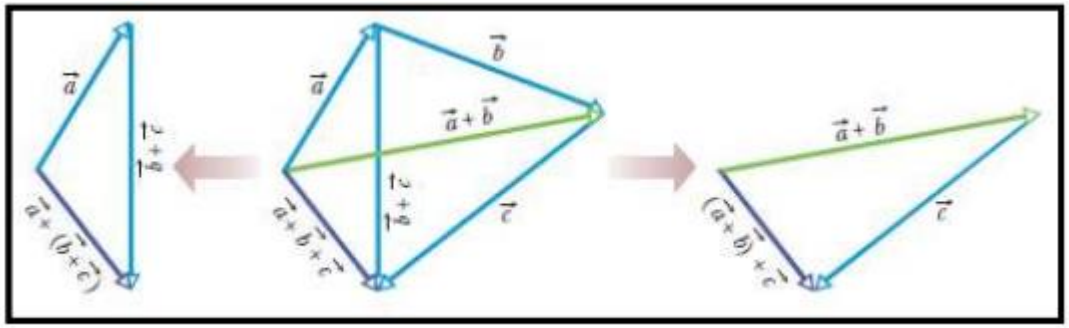
- خاصیت جابه جایی

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

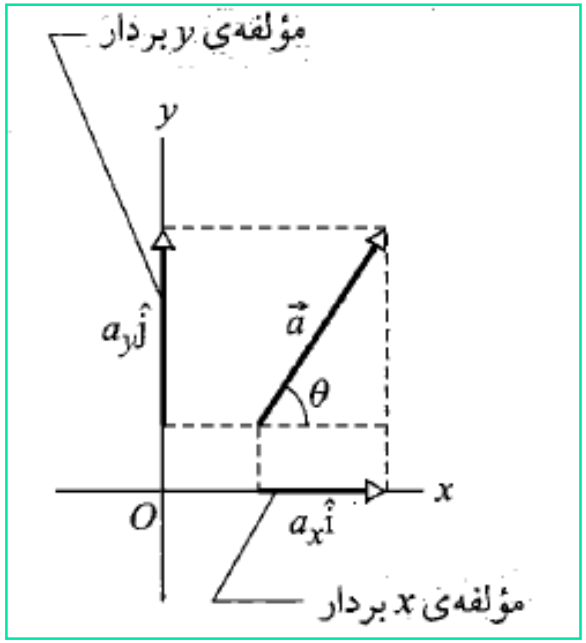


- خاصیت شرکت پذیری

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$



مولفه های بردار



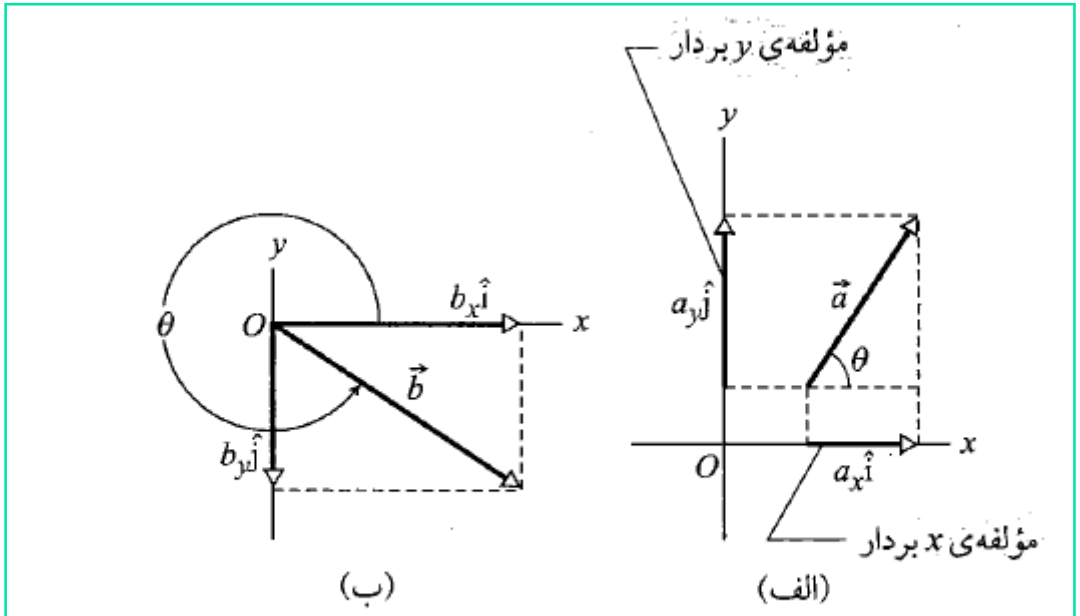
- $a_x = a\cos\theta$
- $a_y = a\sin\theta$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

θ زاویه ای که از جهت مثبت محور x
به صورت پادساعتگرد ساخته می شود.

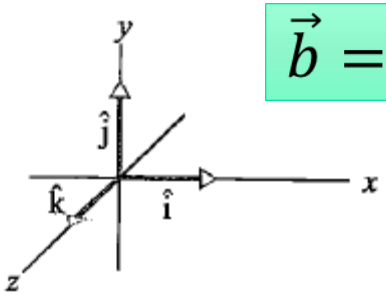
جمع کردن بردارها به کمک مولفه ها



(الف) نمودار مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{a}$. (ب) نمودار مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{b}$.

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}$$



$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

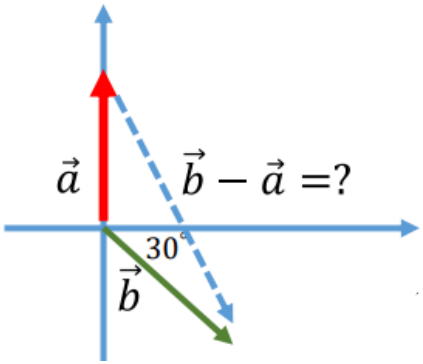
$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

$$r_z = a_z + b_z$$

تمرین

- گردبادی در ۲۰۰ کیلومتری یک شهر و در جهت ۳۰ درجه جنوب شرق در حرکت است. فرض کنید که یک هواپیمای شناسایی در ۱۰۰ کیلومتری شمال شهر قرار دارد. چه میزان جابجایی لازم است تا هواپیما وارد مرکز گرد باد شود.



$$\vec{a} = 100\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} \\ &b_x = b\cos\theta = 200\cos(-30) = 173 \\ &b_y = b\sin(-30) = -100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{b} = 173\,\vec{i} - 100\,\vec{j}$$

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} = 173\,\vec{i} - 200\,\vec{j}\,, \quad |\vec{c}| = \sqrt{173^2 + 200^2} = 265\,km$$

ضرب بردارها

- ضرب عدد در بردار: حاصل حتما بردار است.

$$m\,\vec{a} = m(a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) = m\,a_x\,\hat{\imath} + m\,a_y\,\hat{\jmath} + m\,a_z\hat{k}$$

- ضرب نقطه ای (ضرب دو بردار): حاصل حتما عدد است.

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k}\\ \vec{b} &= b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\vec{a}.\vec{b} &= |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta\\ \vec{a}.\vec{b} &= a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

ضرب بردارها

- چند نکته در مورد ضرب نقطه ای:

- **خاصیت جابجایی**

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

- خاصیت پخشی

$$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$$

$$\vec{a}.\vec{a} = a^2$$

ضرب برداری

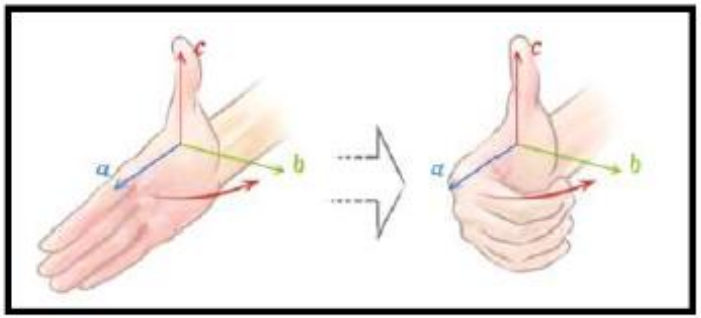
- ضرب برداری (ضرب دو بردار): حاصل حتما بردار است.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = a_x\,\hat{\imath} + a_y\,\hat{\jmath} + a_z\,\hat{k} \\ \vec{b} = b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath} + b_z\,\hat{k}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = (a_y\,b_z - b_y a_z)\hat{\imath} + (a_z\,b_x - b_z a_x)\hat{\jmath} + (a_x\,b_y - b_x a_y)\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$$

θ : زاویه کوچکتر بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$

راستای بردار $\vec{c}$ بر صفحه شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.



جهت بردار $\vec{c}$ از قانون دست راست پیروی می کند.چهار انگشت دست راست در جهت بردار اول، چرخش انگشتان در جهت بردار دوم، آنگاه انگشت شصت در جهت خواهد بود.

ضرب برداری

- قانون جابه جایی در ضرب برداری صدق نمی کند.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

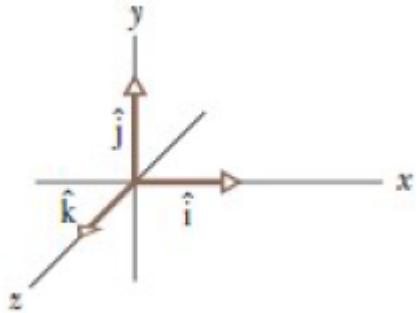
- اگر دو بردار موازی یا پادموازی باشند ضرب برداری آنها صفر است.

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$$ حاصل عدد است.

$$\vec{a} \times = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$$ حاصل بردار است.

ضرب برداری بردارهای یکه: در جهت پادساعتگرد در نظر میگیریم.



$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

ضرب برداری

- روش دترمینان برای محاسبه ضرب برداری به صورت مؤلفه ای

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\jmath}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

برای محاسبه هر مؤلفه ابتدا سطر و ستون مربوط به آن مؤلفه را حذف کرده و سپس دترمینان باقی عناصر را حساب می کنیم (به مؤلفه $\hat{\jmath}$ دقت شود).

مثال

زاویه میان دو بردار $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{b} = -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$
را به دست آورید.

$$|b| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \qquad |b| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad |a| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

مثال

- زاویه میان دو بردار $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{b} = \widehat{-i} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ را به دست آورید؟

$$cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{-1-2-2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{-5}{6}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(-\frac{5}{6}\right)$$

تمرین

- سه عبارت $\vec{a} = -\widehat{3}i + 3\hat{j} + 2\widehat{k}$ و $\vec{b} = -\widehat{2}i - 4\hat{j} + 2\widehat{k}$ و $\vec{c} = \widehat{2i} + 3\hat{j} + \widehat{k}$ در نظر بگیرید حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) =$

$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) =$

به محض اینکه از یاد گرفتن دست بردارید
شروع به مردن می کنید

البرت انیشتین